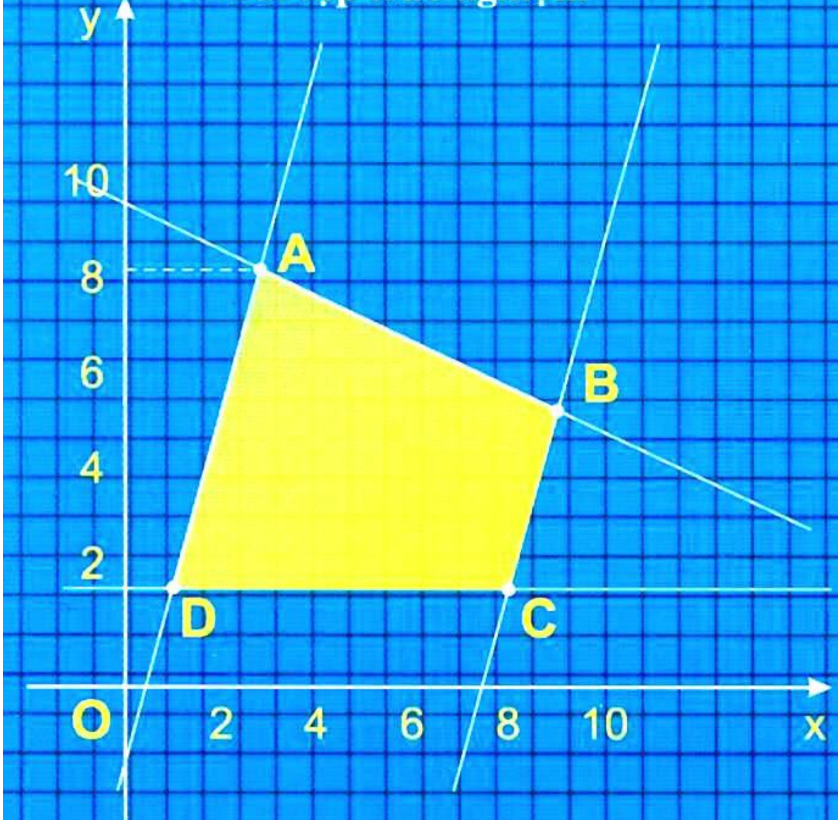
PGS. TS NGUYỄN VĂN LỘC ( Chủ biên )
TRẦN QUANG TÀI - MAI XUÂN ĐÔNG - LÊ NGỌC HẢI - TRỊNH MINH LÂM

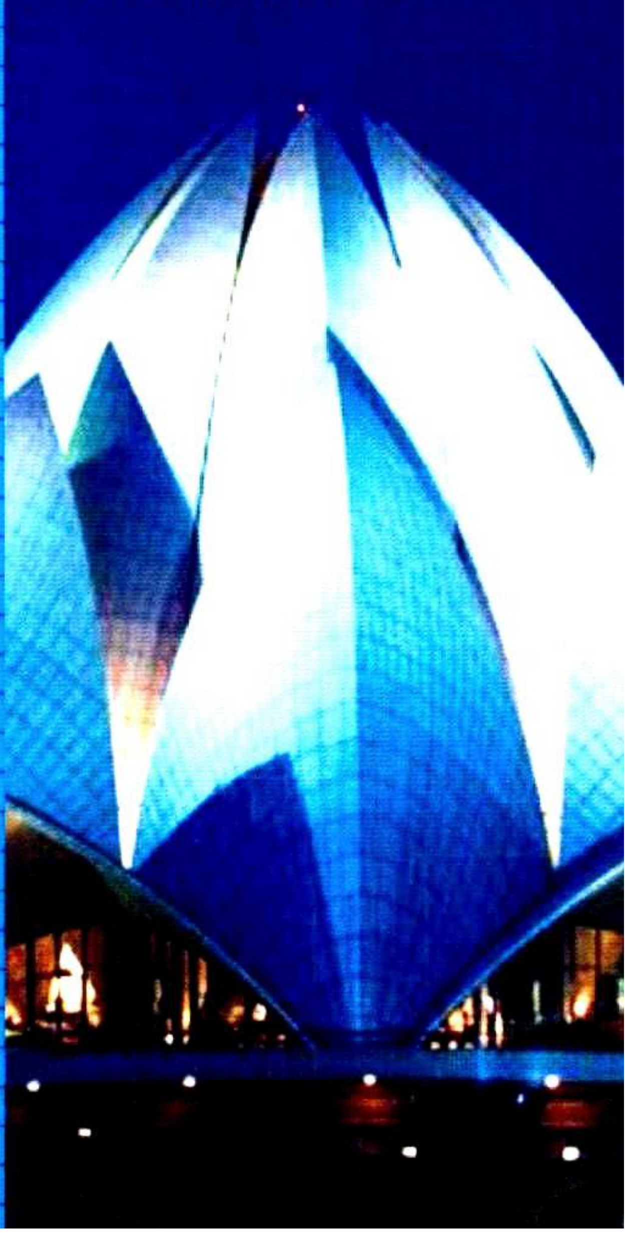
*Hướng dẫn*

# GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10

( Tái bản lần thứ hai )

- Tóm tắt lý thuyết
- Bài tập căn bản
- Bài tập tương tự và nâng cao
- Bài tập trắc nghiệm





NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

**PGS. TS. NGUYỄN VĂN LỘC** (*chủ biên*)
**Trần Quang Tài - Mai Xuân Đông**
**Lê Ngọc Hải - Trịnh Minh Lâm**

*Hướng dẫn*

# GIẢI BÀI TẬP
# ĐẠI SỐ 10

***(Tái bản lần thứ hai)***

- ***Tóm tắt lý thuyết***
- ***Bài tập căn bản***
- ***Bài tập tương tự và nâng cao***

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**

# LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách "**Hướng dẫn giải bài tập Đại số 10**" gồm các chương tương ứng với các chương của chương trình Đại số 10 năm 2006.

Mỗi mục (§) của chương gồm bốn phần:

**I. Tóm tắt lý thuyết**

**II. Bài tập cơ bản**

**III. Bài tập tương tự và nâng cao**

**IV. Đáp số và hướng dẫn giải**

***Phần I.*** Trình bày những vấn đề lý thuyết trọng tâm nhất của chương trình mà các em cần phải hiểu và nắm vững.

***Phần II.*** Trình bày lời giải của tất cả các bài tập SGK; mỗi bài tập đều nêu đầy đủ các bước lập luận với căn cứ là các định nghĩa, định lí, tính chất đã học.

***Phần III.*** Giới thiệu các bài tập cùng dạng với các bài tập SGK và các bài tập nâng cao có đánh dấu (*) dành cho học sinh khá, giỏi.

***Phần IV.*** Trình bày đáp số và hướng dẫn giải các bài tập ở phần III.

Việc sử dụng sách nên thực hiện theo trình tự như sau: Sau khi học lý thuyết, các em hãy tự mình giải các bài tập của SGK, nếu gặp khó khăn có thể tham khảo lời giải bài tập trình bày ở phần II, hơn nữa ngay cả khi giải được bài tập của SGK, các em cũng nên so sánh lời giải của mình với lời giải được trình bày trong sách này để hiểu sâu sắc, đầy đủ kiến thức và phương pháp giải bài toán. Tiếp theo các em nên dành thời gian giải các bài tập ở phần III để rèn luyện kĩ năng giải các dạng toán, nếu gặp khó khăn có thể tham khảo đáp số và hướng dẫn giải ở phần IV.

Hy vọng với cách biên soạn này, cuốn sách sẽ là tài liệu hỗ trợ tích cực giúp các em học tốt Đại số 10.

Rất mong các em dùng sách với ý thức tự chủ cao và không dùng sách theo cách chỉ "đọc" các lời giải có sẵn của các bài tập SGK.

*Các tác giả*

# CHƯƠNG I

# MỆNH ĐỀ TẬP HỢP

## §1. MỆNH ĐỀ

### I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**1. Mệnh đề:** Là một câu thỏa mãn đồng thời hai yêu cầu sau đây:

**a)** Câu ấy hoặc đúng, hoặc sai.

**b)** Câu ấy không thể vừa đúng, vừa sai.

**2. Mệnh đề chứa biến**

Ví dụ: Xét câu "$x^2 > x$".

Câu trên không là mệnh đề, nhưng với mỗi một giá trị xác định của x, ta có một mệnh đề.

Chẳng hạn: $x = 1$, ta có mệnh đề sai: "$1^2 > 1$".

$x = 2$, ta có mệnh đề đúng: "$2^2 > 2$".

**3. Mệnh đề kéo theo** là mệnh đề dạng: $P \Rightarrow Q$

Trong đó P, Q là những mệnh đề.

$P \Rightarrow Q$ hiểu là:

"Nếu P thì Q". Chỉ xét mệnh đề loại này với P là mệnh đề đúng.

Khi đó: Nếu Q đúng thì $P \Rightarrow Q$ đúng.

Nếu Q sai thì $P \Rightarrow Q$ sai.

**4. Định lý (Toán học)** là những mệnh đề đúng và thường có dạng: $P \Rightarrow Q$. Khi này ta nói:

P là giả thiết, Q là kết luận của định lý.

hoặc: P là điều kiện đủ để có Q

hoặc: Q là điều kiện cần để có P.

**5. Mệnh đề Đảo**

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

**6. Hai mệnh đề tương đương**

Nếu cả hai mệnh đề: $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng, ta nói P tương đương Q và viết: $P \Leftrightarrow Q$

Khi này ta cũng nói: "P là điều kiện cần và đủ để có Q"

hoặc nói: "P khi và chỉ khi Q".

**7. Với mọi và tồn tại** $\forall$ đọc là với mọi; $\exists$ đọc là tồn tại.

**8. Phủ định của một mệnh đề**

Ví dụ: Mệnh đề P = "$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 > 0$"

Phủ định của P là mệnh đề: $\overline{P}$ = "$\exists x \in \mathbb{R}: x^2 < 0$"

Nhận thấy: P đúng; $\overline{P}$ sai.

Như vậy: Cho mệnh đề A, mệnh đề phủ định của A là $\overline{A}$ thì:

Nếu A đúng thì $\overline{A}$ sai.

Nếu A sai thì $\overline{A}$ đúng.

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Khẳng định nào sau đây là mệnh đề:

**a)** $3 + 2 = 7$; **b)** $4 + x = 3$; **c)** $x + y > 1$; **d)** $2 - \sqrt{5} < 0$.

### *Giải*

**a)** Câu $3 + 2 = 7$ là câu sai. Câu này là mệnh đề.

**b)** Câu $4 + x = 3$ là câu đúng khi $x = -1$, sai khi $x = 0$ nên không phải là mệnh đề. (Vì vừa đúng lại vừa sai).

**c)** Câu $x + y > 1$, đúng khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$, sai khi $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy câu này cũng không phải mệnh đề.

**d)** Câu $2 - \sqrt{5} < 0$ là câu đúng. Câu này là mệnh đề.

**Bài 2.** Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau và phát biểu mệnh đề phủ định của nó.

**a)** 1794 chia hết cho 3; **b)** $\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ;

**c)** $\pi < 3{,}15$; **d)** $|-1{,}25| < 0$.

### *Giải*

** Xét tính đúng sai:*

**a)** 1794 chia hết cho 3: là mệnh đề đúng vì

1794 : 3 = 598 (nghĩa là: 1794 chia hết cho 3 là câu đúng).

**b)** $\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ: là mệnh đề sai, vì thực tế $\sqrt{2}$ là một số vô tỷ.

**c)** $\pi < 3{,}15$: là mệnh đề đúng vì câu: $\pi < 3{,}15$ là câu đúng đã được chứng minh.

**d)** $|-1{,}25| \le 0$: là mệnh đề sai vì thực tế là $|-1{,}25| = 1{,}25 > 0$.

** Lập mệnh đề phủ định:*

**a)** Mệnh đề phủ định của mệnh đề: P = "1794 chia hết cho 3"

là: $\overline{P}$ = "1794 không chia hết cho 3".

*Chú ý:* Vì P đúng nên $\overline{P}$ sai.

**b)** Mệnh đề phủ định của mệnh đề: Q = "$\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ"
là: $\overline{Q}$ = "$\sqrt{2}$ là một số vô tỷ".

**c)** Mệnh đề phủ định của mệnh đề: S = "$\pi < 3,15$" là mệnh đề:
$\overline{S}$ = "$\pi \geq 3,15$".

**d)** Mệnh đề phủ định của mệnh đề: k = "$|-1,25| \leq 0$" là mệnh đề:
$\overline{k}$ = "$|-1,25| > 0$"

**Bài 3.** Cho các mệnh đề kéo theo:

- Nếu a và b cùng chia hết cho c thì a + b chia hết cho c.
- Các số có tận cùng bằng 0 đều chia hết cho 5.
- Một tam giác cân có hai trung tuyến bằng nhau.
- Hai tam giác bằng nhau có diện tích bằng nhau.

**a)** Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mỗi mệnh đề trên.

**b)** Phát biểu mỗi mệnh đề trên, sử dụng khái niệm "điều kiện đủ".

**c)** Phát biểu mỗi mệnh đề trên, sử dụng khái niệm "điều kiện cần".

## *Giải*

**a)** – Mệnh đề đảo của mệnh đề thứ nhất là: "Nếu a + b chia hết cho c thì a và b cùng chia hết cho c".

– Mệnh đề đảo của mệnh đề thứ hai là: "Các số chia hết cho 5 đều có tận cùng bằng 0".

– Mệnh đề đảo của mệnh đề thứ ba là: "Một tam giác có hai trung tuyến bằng nhau thì tam giác ấy cân".

**b)** Sử dụng khái niệm "điều kiện đủ" thì:

– Mệnh đề thứ nhất phát biểu là: "Để a + b chia hết cho c, điều kiện đủ là a và b cùng chia hết cho c".

– Mệnh đề thứ hai phát biểu là: "Để một số chia hết cho 5, điều kiện đủ là chữ số tận cùng của số ấy bằng 0".

– Mệnh đề thứ ba phát biểu là: "Để một tam giác có hai trung tuyến bằng nhau, điều kiện đủ là tam giác ấy cân".

– Mệnh đề thứ tư phát biểu là: "Để hai tam giác có diện tích bằng nhau, điều kiện đủ là hai tam giác ấy bằng nhau".

**c)** Sử dụng khái niệm điều kiện cần thì:

– Mệnh đề thứ nhất phát biểu là: "Để a và b cùng chia hết cho c, điều kiện cần là a + b chia hết cho c".

– Mệnh đề thứ hai phát biểu là: "Để một số có tận cùng bằng 0, điều kiện cần là số ấy chia hết cho 5".

- Mệnh đề thứ ba phát biểu là: "Để một tam giác cân, điều kiện cần là tam giác ấy có hai trung tuyến bằng nhau".
- Mệnh đề thứ tư phát biểu là: "Để hai tam giác bằng nhau, điều kiện cần là chúng có diện tích bằng nhau".

**Bài 4.** Phát biểu mỗi mệnh đề sau, sử dụng khái niệm "cần và đủ".

**a)** Một số có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì chia hết cho 9 và ngược lại.

**b)** Hình thoi là một hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau và ngược lại.

**c)** Phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi biệt số $\Delta$ của nó dương.

### *Giải*

- Sử dụng khái niệm "cần và đủ":

**a)** Mệnh đề thứ nhất phát biểu là: Điều kiện cần và đủ để một số chia hết cho 9 là tổng các chữ số của nó chia hết cho 9.

**b)** Mệnh đề thứ hai phát biểu là: Để một tứ giác là hình thoi, điều kiện cần và đủ là tứ giác ấy là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau.

**c)** Mệnh đề thứ ba phát biểu là: Để phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt, điều kiện cần và đủ là biệt số của nó dương.

**Bài 5.** Dùng ký hiệu $\forall$, $\exists$ để viết các mệnh đề sau:

**a)** Mọi số nhân với 1 đều bằng chính nó.

**b)** Có một số cộng với chính nó bằng 0.

**c)** Mọi số cộng với số đối của nó đều bằng 0.

### *Giải*

**a)** Mệnh đề thứ nhất viết là: "$\forall x \in \mathbb{R} : x \,.\, 1 = x$".

**b)** Mệnh đề thứ hai viết là: "$\exists a \in \mathbb{R} : a + a = 0$".

**c)** Mệnh đề thứ ba viết là: "$\forall x \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$".

**Bài 6.** Phát biểu thành lời mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của nó.

**a)** $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$; **b)** $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = n$;

**c)** $\forall n \in \mathbb{N} : n \le 2n$; **d)** $\exists x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{x}$.

### *Giải*

**a)** Mệnh đề thứ nhất phát biểu là: Lũy thừa bậc hai của mọi số thực đều nhận giá trị dương. Đây là mệnh đề sai, vì "$0^2 > 0$" là sai.

**b)** Mệnh đề thứ hai phát biểu là: Có ít nhất một số tự nhiên bằng bình phương của nó. Đây là mệnh đề đúng, chẳng hạn: $1^2 = 1$.

**c)** Mệnh đề thứ ba phát biểu là: Mọi số tự nhiên đều nhỏ hơn hoặc bằng hai lần của nó. Đây là mệnh đề đúng vì bất đẳng thức: $2n \geq n \Leftrightarrow n \geq 0$ là đúng với mọi số tự nhiên n.

**d)** Mệnh đề thứ tư phát biểu là: Có ít nhất một số thực nhỏ hơn số nghịch đảo của chính nó. Đây là mệnh đề đúng. Chẳng hạn: $\frac{1}{3} < \frac{1}{\frac{1}{3}}$.

**Bài 7.** Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng, sai của nó :

**a)** $\forall n \in \mathbb{N} :$ n chia hết cho n.

**b)** $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$.

**c)** $\forall x \in \mathbb{R} : x < x + 1$.

**d)** $\exists x \in \mathbb{R} : 3x = x^2 + 1$.

### *Giải*

**a)** Mệnh đề phủ định của mệnh đề thứ nhất là: "$\exists n \in \mathbb{N} :$ n không chia hết cho n". Đây là mệnh đề sai, vì nếu $n = 0$ thì phép chia $0 : 0$ tuy là không xác định nhưng có thể xem: $0 : 0 = 1$.

Ngoài ra, nếu $n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ thì $n : n = 1$.

**b)** Mệnh đề phủ định của mệnh đề thứ hai là: "$\forall x \in \mathbb{Q} : x^2 \neq 2$". Đây là mệnh đề đúng và là một định lý đã được chứng minh.

**c)** Mệnh đề phủ định của mệnh đề thứ ba là: "$\exists x \in \mathbb{R} : x \geq x + 1$".

Đây là mệnh đề sai, vì bất phương trình:

$$x \geq x + 1 \Leftrightarrow 0 \geq 1 \text{ vô nghiệm.}$$

**d)** Mệnh đề phủ định của mệnh đề thứ tư là: "$\forall x \in \mathbb{R} : 3x \neq x^2 + 1$".

Đây là mệnh đề sai, chẳng hạn với:

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ thì: } 3\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1 \text{ là đúng.}$$

## II. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 8.** Phát biểu thành lời mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của nó.

**a)** "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > x$" ;

**b)** "$\forall n \in \mathbb{N} : (n + 1)^3 \geq n^3 + 1^3$" ;

**c)** "$\exists x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$".

**Bài 9.** Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của nó.

**a)** $\forall x \in \mathbb{R} : 2x^3 = x^2 + x$ **b)** $\exists a \in \mathbb{Q} : \sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$

**c)** $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + n$ chia hết cho 7 **d)** $\forall x \in \mathbb{R} : 3x^3 = x^2 + x + 1$

**Bài 10*.** Xét mệnh đề: P = "$\exists x \in \mathbb{R} : x^4 - x + 1 \le 0$"

**a)** Lập mệnh đề $\overline{P}$; $\overline{\left(\overline{P}\right)}$ **b)** Chứng minh rằng $\overline{P}$ đúng.

**Bài 11*.** Xét mệnh đề chứa biến:

$P(x; y) =$ "$5x^2 + 5y^2 + 2 = 8xy + 6y - 6x$".

**a)** P(3; 1) là mệnh đề đúng hay sai? Vì sao?

**b)** Tìm tất cả các cặp số (x; y) sao cho P(x; y) là mệnh đề đúng.

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 8.**

**a)** "Có ít nhất một số thực nhỏ hơn bình phương của nó".
Mệnh đề này đúng.

**b)** "Mọi số tự nhiên đều có tính chất: Tổng các lập phương của nó và đơn vị không lớn hơn lập phương tổng của nó và đơn vị".
Mệnh đề này đúng.

**c)** "Có số thực x để nghịch đảo của nó là số nguyên".
Mệnh đề này đúng.

**Bài 9.**

**a)** $\exists x \in \mathbb{R} : 2x^3 \ne x^2 + x$. (Đúng)

**b)** $\forall a \in \mathbb{Q} : \sqrt{a} \in \mathbb{Q}$. (Sai)

**c)** $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + n$ không chia hết cho 7. (Sai)

**d)** $\exists x \in \mathbb{R} : 3x^3 \ne x^2 + x + 1$. (Đúng)

**Bài 10*.**

**a)** $\overline{P}$ = "$\forall x \in \mathbb{R} : x^4 - x + 1 > 0$"; $\overline{\left(\overline{P}\right)} = P$.

**b)** $\overline{P}$ đúng vì: $x^4 - x + 1 = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$ là đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

**Bài 11*.** **a)** P(3; 1) là mệnh đề sai. **b)** $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

# §2. TẬP HỢP

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Tập hợp

Tập hợp (còn gọi là tập) là một khái niệm cơ bản của toán học không định nghĩa. Giả sử đã cho tập hợp A, để chỉ a là phần tử của tập hợp đó ta viết $a \in A$ (đọc là a thuộc A). Để chỉ a không phải là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \notin A$ (đọc là a không thuộc A).

### 2. Cách xác định tập hợp

Có hai cách:

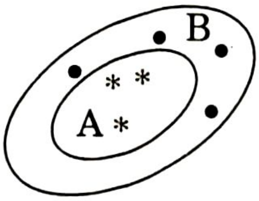
**a)** Liệt kê các phần tử của nó.

**b)** Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

Người ta thường biểu thị tập hợp bởi một miền phẳng bao bởi một đường cong kín, gọi là biểu đồ Ven.

### 3. Tập con

Cho hai tập A và B



- Nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B, thì ta nói A là một tập con của B và viết: $B \supset A$ hoặc $A \subset B$ (đọc là A chứa trong B, hoặc B chứa A hoặc B bao hàm A).

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

- Nếu A không phải tập con của B, ta viết $A \not\subset B$.
- Tập rỗng: là tập không chứa phần tử nào. Ký hiệu $\varnothing$.
- Tính chất cơ bản:

**a)** $A \subset A$ với mọi tập A.

**b)** Nếu $\begin{cases} A \subset B \\ B \subset C \end{cases}$ thì $A \subset C$.

**c)** $\varnothing \subset A$ với mọi tập A (đây là một quy ước).

### 4. Tập hợp bằng nhau

Nếu $\begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$ thì ta nói tập hợp A bằng tập hợp B. Viết A = B.

Vậy $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

## II. BÀI TẬP CƠ BẢN

**Bài 1.** **a)** Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \setminus x < 20$ và $x$ chia hết cho $3\}$. Hãy liệt kê các phần tử của A.

**b)** Cho $B = \{2, 6, 12, 20, 30\}$. Hãy xác định B bằng cách chỉ ra một tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

**c)** Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp các học sinh cao trên 1m65 của lớp em.

### *Giải*

**a)** $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 20$ và $x$ chia hết cho $3\}$

A viết dưới dạng liệt kê là: $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

**b)** $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 31$ và $x$ là ước số chẵn khác 4 và khác 10 của $60\}$

**c)** Ví dụ: Lớp 10A của em có 5 bạn cao trên 1m65 là: bạn Hải, bạn Lan, bạn Hà, bạn Thủy, bạn Mạnh thì tập Q các bạn ấy là:

Q = {Hải, Lan, Hà, Thủy, Mạnh}.

**Bài 2.** Trong hai tập A, B dưới đây, tập hợp nào là tập con của tập hợp còn lại?

**a)** A là tập hợp các hình vuông; B là tập hợp các hình thoi.

**b)** $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là ước chung của 24 và $30\}$.

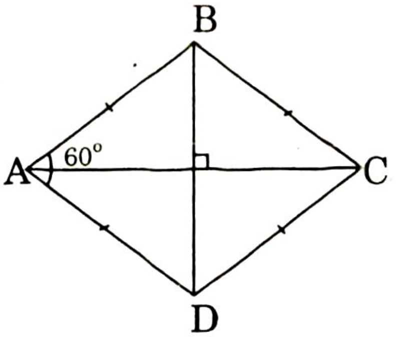
$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là ước của $6\}$.

### *Giải*

**a)** Ta đã biết "hình vuông là hình thoi có một góc vuông" nên mỗi phần tử của A là một phần tử của B.

Vậy $A \subset B$. Ngược lại, có ít nhất một hình thoi sau đây:

Hình thoi ABCD với $\widehat{A} = 60^\circ$ không phải là hình vuông.



Vậy $B \not\subset A$, do đó: $\begin{cases} A \subset B \\ B \not\subset A \end{cases}$

$\Rightarrow$ Các tập A và B không bằng nhau.

**b)** Viết dưới dạng liệt kê: $A = \{1, 2, 3, 6\}$

$B = \{1, 2, 3, 6\}$

Vậy $\begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases} \Rightarrow \quad A = B.$

**Bài 3.** Tìm tất cả các tập con của tập hợp sau:

**a)** $A = \{a; b\}$; **b)** $B = \{0; 1; 2\}$.

### *Giải*

**a)** Các tập con của A là: $A_1 = \varnothing$ ; $A_2 = \{a\}$; $A_3 = \{b\}$; $A_4 = \{a; b\}$

**b)** Các tập con của B là: $B_1 = \varnothing$ ; $B_2 = \{0\}$; $B_3 = \{1\}$; $B_4 = \{2\}$

$B_5 = \{0; 1\}$; $B_6 = \{0; 2\}$; $B_7 = \{1; 2\}$; $B_8 = \{0; 1; 2\}$;

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 4.**

**a)** Cho A $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 30$ và x chia hết cho $4\}$. Hãy liệt kê các phần tử của A.

**b)** Cho $B = \{3; 7; 11; 13; 17\}$. Hãy xác định B bằng cách chỉ ra một tính chất đặc trưng cho các phần tử của B.

**Bài 5.** Trong hai tập hợp C và D dưới đây, tập nào là tập con của tập còn lại? Hai tập A và B có bằng nhau không?

**a)** A là tập các hình bình hành.

B là tập các hình thang.

**b)** $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là ước chung của 28 và $40\}$.

$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là ước của $4\}$.

**Bài 6*.** Hãy liệt kê các phần tử của tập A sau dây:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^6 + x^2 + x = x^4 + x^3 + 1\}.$$

**Bài 8*.** Cho tập A như sau: $A = \{a \in \mathbb{Z} \mid 7a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 0\}$

Chứng minh rằng $A = \varnothing$.

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 4.**

**a)** Đáp số: $A = \{0; 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28\}$.

**b** Kết quả: $B = \{x \mid x$ là số nguyên tố nhỏ hơn 18 và $x \neq 5\}$.

**Bài 5.**

**a** $A \subset B$; A và B không bằng nhau.

**b** Liệt kê $A = \{1; 2; 4\}$; $B = \{1; 2; 4\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases} \text{ và } A = B.$$

**Bài 6*.** $A = \{-1; 1\}$.

**Bài 7*.** Xét $A = \{a \in \mathbb{Z} \setminus 7a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 0\}$.

Phương trình ẩn a sau: $7a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 0$ được biến đổi thành:

$$6a^3 + (a^3 - 3a^2 + 3a - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sqrt[3]{6} \,.\, a)^3 - (a-1)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sqrt[3]{6}\,a - a + 1)(p^2 + p \,.\, q + q^2) = 0 \quad (*)$$

Trong đó $\begin{cases} p = \sqrt[3]{6}\,a \\ q = a - 1 \end{cases}$

Nhận thấy $p^2 + p\,.\,q + q^2 = \left(p + \dfrac{q}{2}\right)^2 + \dfrac{3q^2}{4} \geq 0 \ \forall p; \forall q$

Có dấu "=" khi và chỉ khi $\begin{cases} q = 0 \\ p + \dfrac{q}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 0 \\ p = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{6}\,a = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$, hệ này vô nghiệm.

Nói cách khác, với $\begin{cases} p = \sqrt[3]{6}\,a \\ q = a - 1 \end{cases}$ thì $p^2 + p\,.\,q + q^2 > 0$

Vì thế (*) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{6}\,a - a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{1 - \sqrt[3]{6}}$.

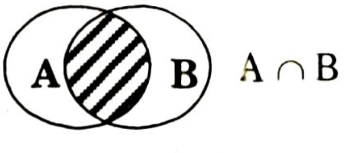
Vì $\dfrac{1}{1 - \sqrt[3]{6}}$ là số vô tỷ, nên từ cách xác định A thì $A = \varnothing$.

# §3. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

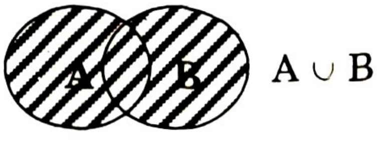
### 1. Giao của hai tập hợp

$C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$



### 2. Hợp của hai tập hợp

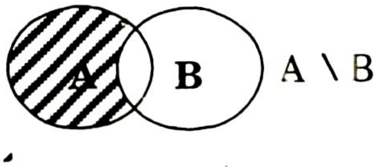
$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$



### 3. Hiệu và phần bù của hai tập hợp

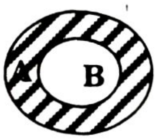
**a)** Hiệu:

$C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$



**b)** Phần bù:

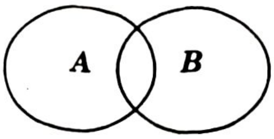
Khi $B \subset A$ thì $A \setminus B$ gọi là phần bù của B trong A và ký hiệu là $C_AB$.

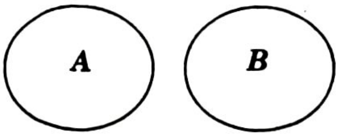


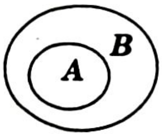
$C_AB$

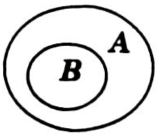
## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Vẽ lại và gạch chéo các tập hợp $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ trong các trường hợp sau:



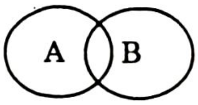


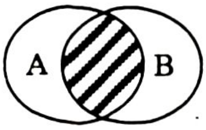




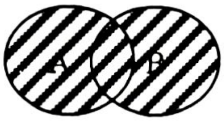
### *Giải*

a) *Trường hợp 1:*

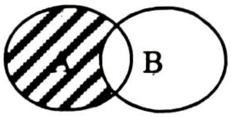




$A \cap B$

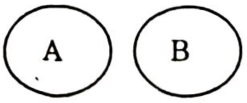


$A \cup B$

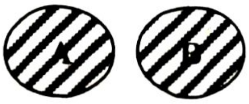


$A \setminus B$

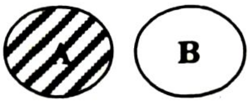
b) *Trường hợp 2:*



$A \cap B = \varnothing$ (không biểu hiện bằng "gạch chéo" được)

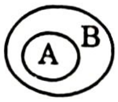


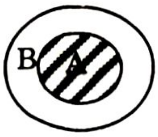
$A \cup B$



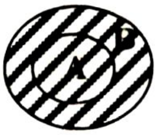
$(A \setminus B) = A$

c) *Trường hợp 3:*





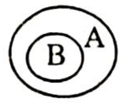
$A \cap B = A$

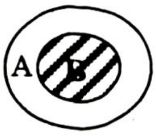


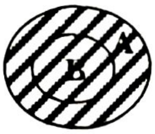
$A \cup B = B$

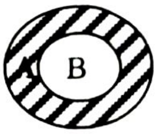
Trường hợp này $A \subset B$ nên $A \setminus B = \varnothing$, không biểu hiện bằng "gạch chéo" được.

d) *Trường hợp 4:*









$A \cap B = B \qquad A \cup B = A \qquad A \setminus B = C_AB$

**Bài 2.** Xác định: $A \cap A$; $A \cup A$; $A \cap \varnothing$; $A \cup \varnothing$; $C_AA$; $C_A\varnothing$.

### *Giải*

Ta có $A \cap A = \left\{ x \mid \begin{cases} x \in A \\ x \in A \end{cases} \right\} \Rightarrow A \cap A = \{x \mid x \in A\} \Rightarrow A \cap A = A$

Hoàn toàn tương tự thì: $A \cup A = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cup \varnothing = A$

và: $C_AA = \varnothing$; $C_A\varnothing = A$.

**Bài 3.** Trong số 45 học sinh của lớp 10A có 15 bạn là học sinh giỏi, 20 bạn hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa học giỏi vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi:

**a)** Lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn khen thưởng bạn đó phải học giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt?

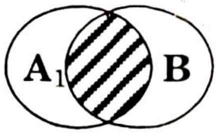
**b)** Lớp 10A có bao nhiêu bạn chưa học giỏi và chưa có hạnh kiểm tốt?

### *Giải*

Gọi $A_1$ là tập các học sinh học giỏi của lớp 10A

B tập là các học sinh có hạnh kiểm tốt của lớp 10A.

Ta có biểu đồ sau:



Vậy tập: $A_1 \cap B$ có 10 phần tử;

$A_1 \cup B$ có 35 phần tử

**a)** Có 35 em được khen thưởng

**b)** Số bạn chưa học giỏi đồng thời chưa có hạnh kiểm tốt là số phần tử của tập hợp $C \setminus (A_1 \cup B)$, (trong đó C là tập hợp các bạn học sinh lớp 10A)

Vậy số các bạn này là: $45 - 35 = 10$ bạn.

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 4.** Cho các tập: $A = \{1; 2; 3\}$; $B = \{2; 3; 4\}$ và $C = \{5; 6; 7\}$

Hãy tìm: $A \cap B$; $A \cup B$; $(A \cup B) \cup C$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.

**Bài 5*.** Cho $A = \{1; 3; 5\}$; $B = \{1; 5\}$ và $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0\}$

**a)** Tìm $(B \setminus A) \cap (A \setminus B)$.

**b)** Tìm $C_AB$; Tìm $E = A \cap D$; Tìm $C_AE$.

**Bài 6*.** Cho $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{3; 4; 5\}$

**a)** Tập $A \cup B$ có bao nhiêu phần tử?

**b)** Chứng minh: $(A \cup B) \setminus (B \setminus A) = A$.

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 4.** Đáp số: $A \cap B = \{2; 3\}$; $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$

$(A \cup B) \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$; $A \setminus B = \{1\}$; $B \setminus A = \{4\}$.

**Bài 5*. a)** Đáp số: $(B \setminus A) \cap (A \setminus B) = \varnothing$.

**b)** Đáp số: $C_AB = \{3\}$. Viết D dưới dạng liệt kê ta được: $D = \{-1; 1; 3\}$ nên: $E = A \cap D = \{1; 3\}$ và $C_AE = A \setminus E = \{5\}$ (vì $E \subset A$).

**Bài 6*. a)** Đáp số: $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ có 5 phần tử.

**b)** Vì $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và $B \setminus A = \{5\}$

$\Rightarrow (A \cup B) \setminus (B \setminus A) = \{1; 2; 3; 4\} = A$.

# §4. CÁC TẬP SỐ

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Các tập số đã học

**a)** Tập số tự nhiên: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...\}$

**b)** Tập số tự nhiên dương: $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; ...\}$

**c)** Tập số nguyên: $\mathbb{Z} = \{... ; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$

**d)** Tập số hữu tỷ: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0\right\}$.

Trong $\mathbb{Q}$, với hai số $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$ ta định nghĩa: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

**e)** Tập số thực $\mathbb{R}$ : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Trong đó $\mathbb{I}$ là tập hợp các số vô tỷ.

(Số vô tỷ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn).

### 2. Các tập con của ℝ

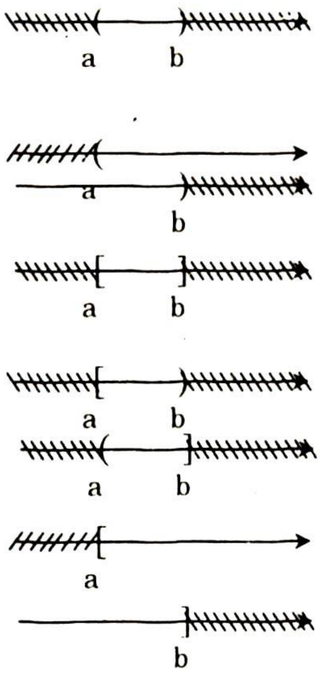
* Khoảng: $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

* Đoạn: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$

* Nửa khoảng: $[a; b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$



$$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$$

$$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$$

$$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$$

* Ký hiệu: $+\infty$ đọc là "dương vô cực" (hoặc dương vô cùng).
$-\infty$ đọc là "âm vô cực" (hoặc âm vô cùng).

* Viết tập $\mathbb{R}$ : $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$, gọi là khoảng $(-\infty; +\infty)$

* Quy ước: $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$ ; $\mathbb{R}_- = (-\infty; 0]$; $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
$\mathbb{R}^*_+ = (0; +\infty)$; $\mathbb{R}^*_- = (-\infty; 0)$.

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Xác định các tập sau và biểu diễn chúng trên trục số:

**Bài 1.**

**a)** $[-3; 1) \cup (0; 4]$; **b)** $(0; 2] \cup [-1; 1)$;

**c)** $(-2; 15) \cup (3; +\infty)$; **d)** $\left(-1; \dfrac{4}{3}\right) \cup [-1; 2)$;

**e)** $(-\infty; 1) \cup (-2; +\infty)$.

### *Giải*

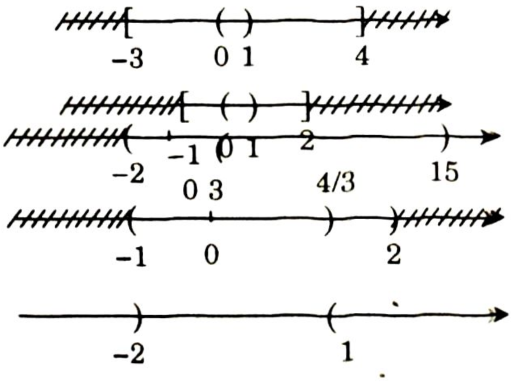
**a)** $[-3; 1) \cup (0; 4] = [-3; 4]$;

**b)** $(0; 2] \cup [-1; 1) = [-1; 2]$;

**c)** $(-2; 15) \cup (3; +\infty) = (-2; +\infty)$;

**d)** $\left(-1; \dfrac{4}{3}\right) \cup [-1; 2) = (-1; 2)$;

**e)** $(-\infty; 1) \cup (-2; +\infty) = (-\infty; +\infty)$.



**Bài 2.**

**a)** $(-12; 3) \cap [-1; 4]$; **b)** $(4; 7) \cap (-7; -4)$;

**c)** $(2; 3) \cap [3; 5)$; **d)** $(-\infty; 2] \cap [-2; +\infty)$.

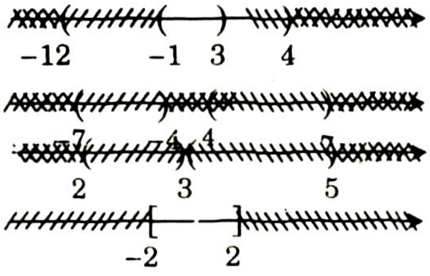
### *Giải*

**a)** $(-12; 3) \cap [-1; 4] = (-1; 3)$;

**b)** $(4; 7) \cap (-7; -4) = \varnothing$;

**c)** $(2; 3) \cap [3; 5) = \varnothing$;

**d)** $(-\infty; 2] \cap [-2; +\infty) = [-2; 2]$.



**Bài 3.**

**a)** $(-2; 3) \setminus (1; 5)$; **b)** $(-2; 3) \setminus [1; 5)$;

**c)** $\mathbb{R} \setminus (2; +\infty)$; **d)** $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3]$.

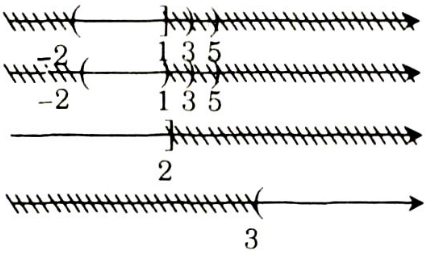
*Giải*

**a)** $(-2; 3) \setminus (1; 5) = (-2; 1]$;

**b)** $(-2; 3) \setminus [1; 5) = (-2; 1)$;

**c)** $\mathbb{R} \setminus (2; +\infty) = (-\infty; 2]$;

**d)** $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3] = (3; +\infty)$.



## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 4*.** Cho đoạn $[0; 1]$ và $[a^2; 2]$

**a)** Khi $a = -\frac{1}{2}$ hãy tìm $[0; 1] \cap [a^2; 2]$;

**b)** Khi a lớn nhất, hãy biểu diễn đoạn $[-a; a]$ trên trục số;

**c)** Tìm a sao cho $[0; 1] \cap [a^2; 2] = \varnothing$.

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

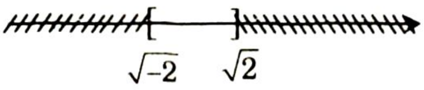
**Bài 4.**

**a)** Đáp số: $[0; 1] \cap [\frac{1}{4}; 2] = [\frac{1}{4}; 1]$.

**b)** Theo bài ra thì $a^2 \leq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$

$\Rightarrow a_{\text{lớn nhất}} = \sqrt{2} \Rightarrow$ đoạn $[-a; a]$ khi $a = \sqrt{2}$

là đoạn biểu diễn trên trục số sau:



**c)** a phải thoả mãn: $a^2 > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 1 \\ a < -1 \end{array}\right.$

# §5. SỐ GẦN ĐÚNG. SAI SỐ

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Sai số tuyệt đối của một số gần đúng:** Nếu a là số gần đúng của $\bar{a}$ thì $\Delta_a = |\bar{a} - a|$ được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a.
2. **Độ chính xác của một số gần đúng**

Nếu $\Delta_a = |\bar{a} - a| \leq d$ thì: $-d \leq \bar{a} - a \leq d$ hay $a - d \leq \bar{a} \leq a + d$

Ta nói: a là số gần đúng của $\overline{a}$ với độ chính xác d, và qui ước viiết gọn là : $\overline{a} = a \pm 01d$.

3. **Chữ số đáng tin:** Chữ số k của số gần đúng a được gọi là chữ số đáng tin (hay chữ số chắc chắn), nếu $\Delta_a$ không vượt quá một đơn vị của hàng có chữ số k đó.

4. **Quy tròn số gần đúng với độ chính xác đã cho** là cách viết số gần đúng mà tất cả các chữ số là chữ số đáng tin.

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Cho $\sqrt[3]{5} = 1,709975947...$ Viết gần đúng $\sqrt[3]{5}$ theo nguyên tắc làm tròn với hai, ba, bốn chữ số thập phân và ước lượng sai số mắc phải.

### *Giải*

- Làm tròn với hai chữ số thập phân thì: $\sqrt[3]{5} = 1,71$.
  Sai số mắc phải là: $|1,709975947 - 1.71| = 0.000024053$.
- Làm tròn với ba chữ số thập phân thì: $\sqrt[3]{5} = 1,710$.
  Sai số mắc phải là: $|1,709975947 - 1.710| = 0.000024053$.
- Làm tròn với bốn chữ số thập phân thì: $\sqrt[3]{5} = 1,710$.
  Sai số mắc phải là: $|1,709975947 - 1.710| = 0.000024053$.

**Bài 2.** Chiều dài một cái cầu đo được là: $d = 1745,25 \pm 0,01$m

Xác định chữ số đáng tin của d và viết d dưới dạng chuẩn.

### *Giải*

Xét số $d = 1745,25 \pm 0,01$m thì độ chính xác $h = 0,01 \Rightarrow \Delta_a \leq 0,01$m. Số 0,01 đúng bằng một đơn vị ở hàng "phần trăm" và $0,01 < 0,1$, số 0,1 là 1 đơn vị ở hàng "phần mười" $\Rightarrow$ các chữ số 5; 2; 5; 4; 7; 1 trong số gần đúng 1745, 25 đều đáng tin. Cách viết chuẩn là: $d = 1745,25$m.

**Bài 3.** Cho giá trị gần đúng của số π là: 3,141592653590 với 10 chữ số chắc chắn.

**a)** Viết giá trị gần đúng của π dưới dạng chuẩn và ước lượng sai số mắc phải.

**b)** Hãy ước lượng sai số mắc phải nếu lấy giá trị gần đúng của π là 3,14 hoặc 3,1416.

### *Giải*

**a)** Số với 10 chữ số đáng tin, viết ở dạng chuẩn là: 3.141592654

Sai số mắc phải là:

$$|3{,}141592653590 - 3{,}141592654| = 0{,}000000000410 < \frac{5}{10000000000}$$

hay $\Delta_a < 5 \cdot 10^{-10}$, hay 1 cận trên của sai số tuyệt đối của số gần đúng đã cho là $h = 5 \cdot 10^{-10}$.

**b)** Tương tự như trên thì:

Nếu $\pi$ lấy gần đúng là 3,14 thì h = 0,0002

Nếu $\pi$ lấy gần đúng là 3,1416 thì h = 0,00001.

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 4.** Cho các số A = 312,345789760; B = 5, 049900761

Hãy viết các số A′, B′ lần lượt là các số gần đúng của A, B (với 8 chữ số chắc chắn, ở dạng chuẩn).

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 4.** Đáp số: A′ = 312, 34579; B′ = 5,0499008.

# ÔN TẬP CHƯƠNG I

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### A.

1. **Mệnh đề:** là một câu thoả mãn đồng thời hai yêu cầu:
   - **a)** Câu ấy hoặc là đúng, hoặc là sai
   - **b)** Câu ấy không thể vừa đúng và vừa sai.
2. **Mệnh đề kéo theo:** là mệnh đề có dạng $P \Rightarrow Q$.
3. **Mệnh đề phủ định:** Cho mệnh đề A. Mệnh đề bác bỏ mệnh đề A được gọi là mệnh đề phủ định của mệnh đề A. Ký hiệu: $\overline{A}$.
4. **Định lý:**
   Những mệnh đề đúng và có dạng $P \Rightarrow Q$ được gọi là định lý.
   P là giả thiết, Q là kết luận của định lý.
5. **Mệnh đề đảo:**
   Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề đảo của mệnh đề $Q \Rightarrow P$.

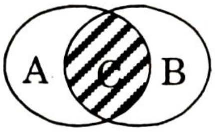
## B. TẬP HỢP

### 1. Các phép toán về tập hợp

**a)** Giao của 2 tập hợp A và B là một tập hợp C mà các phần tử thuộc tập A và tập B.

Ký hiệu: $C = A \cap B$. Mô tả:

Vậy $x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$

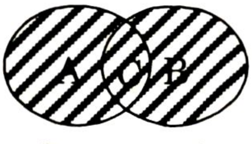


$C = A \cap B$

**b)** Hợp của 2 tập hợp A và B là một tập hợp C mà các phần tử thuộc tập A hoặc thuộc tập B.

Ký hiệu: $C = A \cup B$. Mô tả:

Vậy $x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right.$

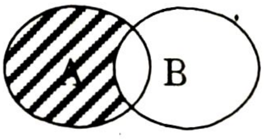


$C = A \cup B$

**c)** Hiệu của 2 tập hợp A và B là một tập hợp C mà các phần tử thuộc tập A và không thuộc tập B.

Ký hiệu: $C = A \setminus B$. Mô tả:

Vậy $x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$.



$A \setminus B$

Đặc biệt $B \subset A \Rightarrow A \setminus B$ được gọi là phần bù của B trong A.

Ký hiệu: $C_AB = A \setminus B$.

## 2. Các tập hợp thường gặp

**a)** Đoạn: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

**b)** Khoảng $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

**c)** Nửa khoảng $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$(-\infty ; b] = x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

$[a; +\infty ) = \{c \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

## II. BÀI TẬP CƠ BẢN

**Bài 1.** Xác định tính đúng sai của mệnh đề phủ định $\overline{A}$ theo tím đúng sai của mệnh đề A.

### *Giải*

Ta có tính đúng sai tương ứng bảng sau:

| A | Đúng | Sai |
|---|---|---|
| $\overline{A}$ | Sai | Đúng |

**Bài 2.** Thế nào là mệnh đề đảo của mệnh đề $A \Rightarrow B$? Nếu $A \Rightarrow B$ là mệnh đề đúng thì mệnh đề đảo của nó có đúng không? Cho ví dụ minh hoạ.

### *Giải*

- Mệnh đề đảo của mệnh đề $A \Rightarrow B$ là mệnh đề $B \Rightarrow A$.
- Nếu mệnh đề $A \Rightarrow B$ là một mệnh đề đúng thì mệnh đề đảo $B \Rightarrow A$ không chắc là mệnh đề đúng.

  *Ví dụ:* Mệnh đề A = "$\Delta ABC$ là tam giác đều"; Mệnh đề B = "$\Delta ABC$ là tam giác cân".

  Hiển nhiên: Mệnh đề $A \Rightarrow B$: "Nếu $\Delta ABC$ đều thì $\Delta ABC$ cân" là một mệnh đề đúng.

  Mà mệnh đề $B \Rightarrow A$: "Nếu $\Delta ABC$ cân thì $\Delta ABC$ đều" là một mệnh đề sai.

**Bài 3.** Thế nào là mệnh đề tương đương? Nếu A tương đương với B thì có thể nói gì về tính đúng sai của các mệnh đề A và B?

### *Giải*

- Mệnh đề $A \Rightarrow B$ và mệnh đề đảo $B \Rightarrow A$ đều là các mệnh đề đúng thì hai mệnh đề A và B được gọi là tương đương.
- Nếu $A \Leftrightarrow B$ thì: hoặc A đúng và B đúng hoặc A sai và B sai.

**Bài 4.** Nêu định nghĩa tập hợp con và định nghĩa hai tập hợp bằng nhau.

### *Giải*

- Nếu mọi phần tử của tập A đều là phần tử của tập B thì ta nói rằng tập A là tập con của tập B.

  Ký hiệu: $A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$.
- Hai tập A và B được gọi là bằng nhau nếu $A \subset B$ và $B \subset A$.

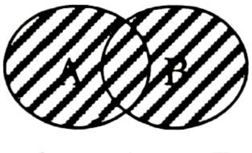
**Bài 5.** Nêu các định nghĩa hợp, giao, hiệu và phần bù của hai tập hợp. Minh hoạ hình vẽ.

### *Giải*

**a)** Định nghĩa về hợp: 2 tập hợp A và B.

Hợp 2 tập hợp A và B là tập C gồm các phần tử thuộc tập A hoặc tập B. Ký hiệu $A \cup B = C$.

Minh hoạ:

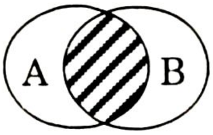


$A \cup B$

**b)** Định nghĩa về giao 2 tập hợp A và B.

Giao 2 tập hợp A và B là tập C gồm các phần tử vừa thuộc tập A vừa thuộc tập B. Ký hiệu $A \cap B = C$.

Minh hoạ:

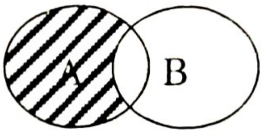


$A \cap B$

**c)** Định nghĩa hiệu của 2 tập hợp A và B.

Hiệu 2 tập hợp A và B là tập C gồm các phần tử thuộc tập A nhưng không thuộc tập B. Ký hiệu $C = A \setminus B$.

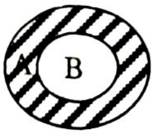
Minh hoạ:



$A \setminus B$

Khi $B \subset A$ thì $A \setminus B$ được gọi là phần bù của B trong A.
Ký hiệu: $C_AB$.

Minh hoạ:



$C_AB$

**Bài 6.** Nêu định nghĩa đoạn [a; b]; khoảng (a; b), nửa khoảng [a; b); (a; b]; $(-\infty; b]$; $[a; +\infty)$. Viết tập $\mathbb{R}$ các số thực dưới dạng một khoảng.

### *Giải*

- Định nghĩa $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$;
- Định nghĩa khoảng $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$;
- Định nghĩa nửa khoảng $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$

$$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$$

$$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$$

$$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\};$$

- Tập số thực $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$.

**Bài 7.** Tại sao các số hiệu thực tế và đo đạc, tính toán, thống kê thường là các số gần đúng?

### *Giải*

Do số hiệu đo đạc thực tế về đo đạc, tính toán thống kê ta phải dùng các phương pháp đo và dụng cụ đặc biệt. Do đó kết quả phép đo phụ thuộc vào phương pháp và dụng cụ nên các số thường là các số gần đúng.

**Bài 8.** Thế nào là sai số tuyệt đối của 1 số gần đúng? Thế nào là độ chính xác của 1 số gần đúng?

### *Giải*

- Nếu a là số gần đúng của số $\bar{a}$ thì $\Delta_a = |\bar{a} - a|$ được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a.
- Nếu $\Delta_a = |\bar{a} - a| \leq h$ thì $a - h \leq \bar{a} \leq a + h$

  Như vậy $\bar{a} \in [a - h; a + h]$.

  Ta nói h là 1 cận trên của sai số tuyệt đối của $\bar{a}$ và a là số gần đúng của $\bar{a}$ với độ chính xác h.

**Bài 9.** Xét tính đúng sai của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ với:

**a)** P = "ABC là một hình vuông"; Q = "ABCD là một hình bình hành".

**b)** P = "ABCD là một hình thoi"; Q = "ABCD là một hình chữ nhật".

### *Giải*

**a)** Ta có: $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề đúng.

**b)** Ta có: $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề sai.

**Bài 10.** Xét mối quan hệ bao hàm giữa các tập sau:

A: là tập hợp các hình tứ giác.
D: là tập hợp các hình chữ nhật.
B: là tập hợp các hình bình hành.
E: là tập hợp các hình vuông.
C: là tập hợp các hình thang.
G: là tập hợp các hình thoi.

### *Giải*

Ta có: $A \supset C \supset B \supset D \supset E$.

hoặc $A \supset C \supset B \supset G \supset E$.

**Bài 11.** Liệt kê các phần tử của mỗi tập hợp sau:

**a)** $A = \{3k - 2 \backslash k = 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$; **b)** $B = \{x \in \mathbb{N} \backslash x \leq 12\}$;

**c)** $C = \{(-1)^n \backslash n \in \mathbb{N}\}$.

### *Giải*

**a)** Tập $A = \{-2; 1; 4; 7; 10; 13\}$

**b)** Tập $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$

**c)** Tập $C = \{-1; 1\}$

**Bài 12.** Giả sử A, B là hai tập hợp đã cho. Tìm các cặp mệnh đề tương đương trong các mệnh đề sau:

P = "$x \in A \cup B$"; R = "$x \in A \cap B$"; T = "$x \in A$ hoặc $x \in B$";
Q = "$x \in A \setminus B$"; S = "$x \in A$ và $x \in B$"; X = "$x \in A$ và $x \notin B$".

### *Giải*

Ta có: $P \Leftrightarrow T$; $R \Leftrightarrow S$ và $Q \Leftrightarrow X$

**Bài 13.** Xác định các tập hợp sau:

**a)** $(-3; 7) \cap (0; 10)$; **b)** $(-\infty; 5) \cap (2; +\infty)$; **c)** $R \setminus (-\infty; 3)$.

### *Giải*

**a)** Ta có: $(-3; 7) \cap (0; 10) = (0; 7)$;

**b)** Ta có: $(-\infty ; 5) \cap [2; +\infty) = (2; 5)$; **c)**Ta có: $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3) = [3; +\infty)$.

**Bài 11.** Dùng máy tính bỏ túi hoặc bảng số để tìm giá trị của $\sqrt[3]{12}$. Làm tròn kết quả nhận được đến số chữ thập phân thứ 3 và ước lượng sai số mắc phải?

### *Giải*

Ta có: $\sqrt[3]{12} = 2,289$

Từ đó ước lượng sai số mắc phải là $h = 5. 10^{-4}$.

**Bài 15.** Chiều cao của ngọn đồi đo được là: $h = 347,13 \pm 0,2m$. Xác định các chữ số đáng tin của h và viết h dưới dạng chuẩn.

### *Giải*

Ta có chiều cao ngọn đồi có các chữ số đáng tin là 3; 4; 7.

Cách viết h dưới dạng chuẩn $h = 347$.

**Bài 16.** Trong các quan hệ bao hàm sau đây quan hệ nào đúng?

A: $A \subset A \cup B$; B: $A \subset B \cap A$; C: $A \cap B \subset A \cup B$;

D: $A \cup B \subset B$; E: $A \cap B \subset A$.

### *Giải*

Ta có quan hệ: (A): $A \subset A \cup B$ là đúng.

(C): $A \cap B \subset A \cup B$ là đúng.

(E): $A \cap B \subset A$ là đúng.

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 17.**

**1.** Cho mệnh đề P = "$\forall x \in \mathbb{R} : x^8 - x^4 + \frac{1}{2} > 0$"

**a)** CMR: P đúng. **b)** Tìm mệnh đề $\overline{P}$.

**2.** Xét Q = "$\exists y \in \mathbb{R} : y^2 + y < -1$".

Thiết lập và phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

**3.** Xét mệnh đề R = "$\exists m \in Q : x^8 - x^4 + \frac{1}{2} = m$". Tìm giá trị nhỏ nhất của $m \in Q$ để mệnh đề R đúng.

# Chương II

# HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

## §1. HÀM SỐ

### I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

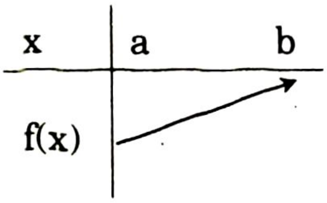
- Định nghĩa hàm số. D là tập hợp con khác rỗng của tập các số thực R. Một hàm số f xác định trên D là một quy tắc cho tương ứng với mỗi phần tử $x \in D$ một và chỉ một số thực y.

  Ta gọi D là tập xác định của hàm số f, phần tử $x \in D$ là biến số. Số thực y tương ứng với số thực x được gọi là giá trị của hàm số f tại x và được kí hiệu là f(x).
- Có nhiều cách cho hàm số: cho hàm số bằng bảng, cho hàm số bằng biểu đồ, cho hàm số bằng công thức. Khi ta cho hàm số $y = f(x)$ bởi công thức, ta quy ước: Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa.
- Định nghĩa đồ thị của hàm số. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D. Đồ thị của hàm số f(x) là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ với mọi $x \in D$.
- Định nghĩa hàm số đồng biến, nghịch biến trên một khoảng.

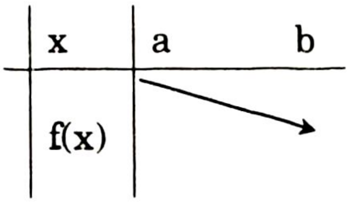
  Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến (hay tăng) trên khoảng (a; b) nếu:

  $\forall x_1, x_2 \in (a; b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

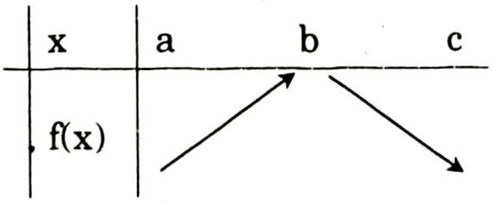
  Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến (hay giảm) trên khoảng (a; b) nếu: $\forall x_1, x_2 \in (a; b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- Để biểu diễn hàm $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng (a; b) hay nghịch biến trên khoảng (a; b) người ta thường dùng bảng sau, gọi là bảng biến thiên:



Hàm số đồng biến trên (a; b)



Hàm số nghịch biến trên (a; b)



Hàm số đồng biến trên (a; b) và nghịch biến trên khoảng (b; c)

- Tính chẵn lẻ của hàm số

  Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D, gọi là hàm số chẵn nếu với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

  Hàm số $y = f(x)$ có tập xác địnhD gọi là hàm số lẻ nếu với mọi

$x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Một hàm số không nhất thiết phải là hàm số chẵn hoặc hàm số lẻ.

- Đồ thị hàm số chẵn nhận Oy (trục tung) làm trục đối xứng. Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

**a)** $y = \dfrac{3x-2}{2x+1}$ **b)** $y = \dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$ **c)** $y = \sqrt{2x+1} - \sqrt{3-x}$

### *Giải*

**a)** Biểu thức $\dfrac{3x-2}{2x+1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{1}{2}$.

Từ đây ta suy ra tập xác định của hàm số là $D = R \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

**b)** Biểu thức $\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 3x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1$ và $x \neq -3$.

Vì vậy tập xác định D của hàm số là $D = R \setminus \{1; -3\}$.

**c)** Biểu thức $\sqrt{2x+1} - \sqrt{3-x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 2x + 1 \geq 0$ và $3 - x \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}$ và $x \leq 3$.

Do đó $D = \left[-\dfrac{1}{2}; 3\right]$ là tập xác định của hàm số.

**Bài 2.** Cho hàm số $y = \begin{cases} x + 1 \text{ với } x \geq 2 \\ x^2 - 2 \text{ với } x < 2 \end{cases}$

Tính giá trị của hàm số đó tại $x = 3$; $x = -1$; $x = 2$

### *Giải*

- Khi $x = 3 \geq 2$, nên giá trị của hàm số tại $x = 3$ là $y = 3 + 1 = 4$;
- Khi $x = -1 < 2$, nên giá trị của hàm số tại $x = -1$ là $y = (-1)^2 - 2 = -1$;
- Khi $x = 2 \geq 2$, nên giá trị của hàm số tại $x = 2$ là $y = 2 + 1 = 3$.

**Bài 3.** Cho hàm số $y = 3x^2 - 2x + 1$, các điểm sau có thuộc đồ thị hàm số hay không?

**a)** M(–1; 6); **b)** N(1; 1); **c)** P(0; 1).

### *Giải*

Đặt $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Gọi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là (C).

Điểm $I(x; y) \in (C) \Leftrightarrow y = f(x)$ $(x \in D)$.

Ta thấy $f(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) + 1 = 6 \Rightarrow M(-1; 6) \in (C)$;

$f(1) = 3.1^2 - 2.1 + 1 = 2 \neq 1 \Rightarrow N(1; 1) \notin (C)$;

$f(0) = 3.0^2 - 2.0 + 1 = 1 \Rightarrow P(0; 1) \in (C)$.

**Bài 4.** Xét tính chẵn lẻ của hàm số sau:

**a)** $y = |x|$; **b)** $y = (x + 2)^2$;

**c)** $y = x^3 + x$; **d)** $y = 2x + 1$.

### *Giải*

**a)** Hàm số $y = |x|$ có tập xác định D = R vì $|x|$ có nghĩa với mọi $x \in R$. Do đó mọi $x \in D$, ta có $-x \in D$, hơn nữa ta có:

$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$ (với $f(x) = |x|$).

Vì vậy f(x) là hàm số chẵn.

**b)** Hàm số $y = (x + 2)^2$ có tập xác định D = R do đó $\forall x \in D, -x \in D$.

Tuy nhiên ta thấy $\begin{cases} f(-2) = 0 \neq 16 = f(2) \\ f(-2) = 0 \neq -16 = -f(2) \end{cases}$ (với $f(x) = (x + 2)^2$).

Vì vậy f(x) là không là hàm số chẵn và cũng không phải hàm số lẻ.

**c)** Đặt $f(x) = x^3 + x$.

Ta có hàm số đã cho có tập xác định là R, vì vậy với $\forall x \in R$ ta có $-x \in R$ và $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$, do đó $y = f(x)$ là một hàm số lẻ.

**d)** Hàm số đã cho có tập xác định D = R. Đặt $f(x) = 2x + 1$, ta có 1 và $-1$ đều thuộc D, tuy nhiên dễ thấy:

$3 = f(1) \neq f(-1) = -1$ và $3 = f(1) \neq -f(-1) = 1$

Do đó hàm số $y = 2x + 1$ không là hàm số chẵn và cũng không là hàm số lẻ.

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 5.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

**a)** $y = \dfrac{x^{10} - x^8 + 1}{x^2 - 1}$; **b)** $y = \sqrt{4 - x} - \sqrt{4 + x}$;

**Bài 6.** Cho hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1, \text{nếu } x \leq 1 \\ \dfrac{x + 1}{x + 3}, \text{nếu } 1 < x \leq 4 \\ 5 \text{ nếu } x > 4 \end{cases}$$

Tính. $f\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; $f\left(\sqrt{3}+2\right)$.

**Bài 7.** Khảo sát tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

**a)** $y = \dfrac{x^{10} - x^8 + 1}{x^2 - 1}$; **b)** $y = \sqrt{4 - x} - \sqrt{4 + x}$

**Bài 8.** Xét sự biến thiên của các hàm số sau trên khoảng đã chỉ ra

**a)** $y = x^2 - 5x + 1$; $\left(\dfrac{5}{2}; +\infty\right)$; **b)** $y = \dfrac{5}{x - 2}$; $(2; +\infty)$;

**c)** $y = x^3 + 2x^2 + 1$; $(-\infty; +\infty)$.

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 5. a)** Tập xác định của hàm số đã cho là $D = R \setminus \{1; -1\}$.

**b)** Tập xác định của hàm số đã cho là: $D = [-4; 4]$.

**Bài 6.** $f(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) = 5$ và $f(\sqrt{3} + 2) = \dfrac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} + 5}$.

**Bài 7. a)** f(x) là hàm số chẵn. **b)** f(x) là hàm số chẵn.

**Bài 8. a)** Đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{5}{2}; +\infty\right)$.

**b)** f(x) đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

**c)** Hàm số đồng biến trên R.

# §2. HÀM SỐ y = ax + b

## I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**1. Hàm số bậc nhất là hàm số có dạng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$**

**a)** Tập xác định : D = R.

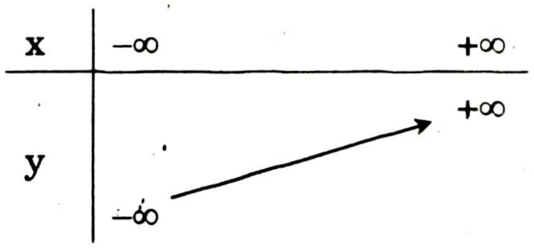
**b)** Sự biến thiên: Là hàm số đơn điệu;

$a > 0$ hàm số đồng biến trên R;

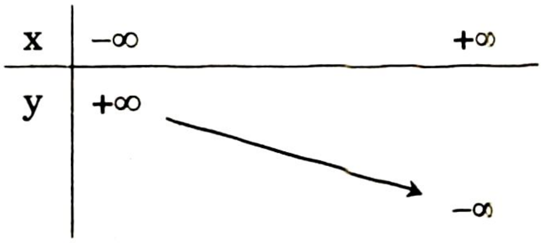
$a < 0$ hàm số nghịch biến trên R.

Ta có bảng biến thiên:

$a > 0$



$a < 0$



**c)** Đồ thị là một đường thẳng (d) cắt cả hai trục toạ độ.

**d)** Hệ số góc: Hệ số a được gọi là hệ số góc của (d).

Gọi $\alpha$ là góc nhọn hợp bởi (d) và (Ox) thì $|a| = \tan\alpha$.

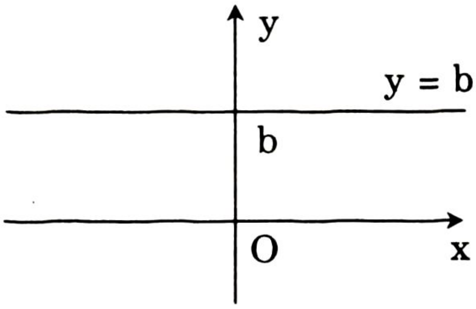
**e)** Điều kiện song song và vuông góc

$(d_1)$: $y = a_1x + b_1$; $(d_2)$: $y = a_2x + b_2$

$(d_1) \,//\, (d_2) \iff a_1 = a_2$ và $b_1 \neq b_2$;

$(d_1) \perp (d_2) \iff a_1a_2 = -1$;

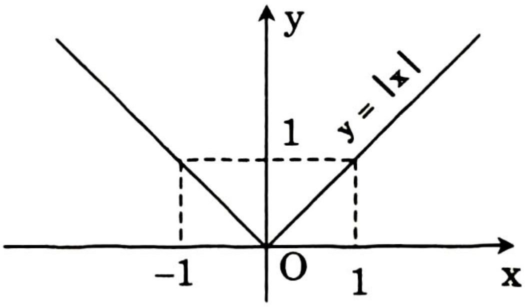
**2. Hàm số y = b**



**a)** Tập xác định D = R.

**b)** Hàm số y = b là hàm hằng. Đồ thị là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm (0; b).

**3. Hàm số y = |x|**



**a)** Tập xác định R.

**b)** Chiều biến thiên

$$y = |x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}.$$

Vậy hàm số y = |x| đồng biến $(0; +\infty)$ và nghịch biến $(-\infty; 0)$

**c)** Đồ thị

Hàm số y = |x| là hàm số chẵn nên đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng.

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Vẽ đồ thị của các hàm số:

**a)** $y = 2x - 3$; **b)** $y = -\frac{3}{2}x$; **c)** $y = -\frac{3}{2}x + 7$; **d)** $y = \sqrt{2}$.

### *Giải*

**a)** $y = 2x - 3$

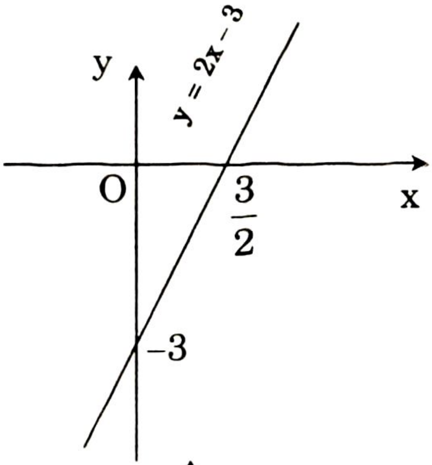
- Tập xác định R
- $a = 2 > 0$ nên hàm số đồng biến trên R.

Bảng biến thiên:

| x | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| y | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

- Đồ thị:

Đồ thị hàm số $y = 2x - 3$ là một đường thẳng có hướng đi lên và cắt các trục toạ độ tại các điểm $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ và $(0; -3)$



**b)** $y = -\frac{3}{2}x$

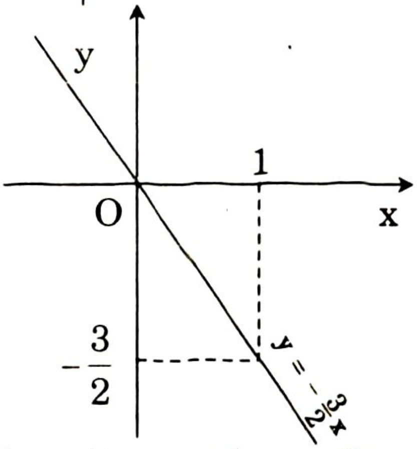
- Tập xác định R.
- $a = -\frac{3}{2} < 0$ nên hàm số $y = -\frac{3}{2}x$ nghịch biến trên R.

Bảng biến thiên

| x | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |

- Đồ thị:

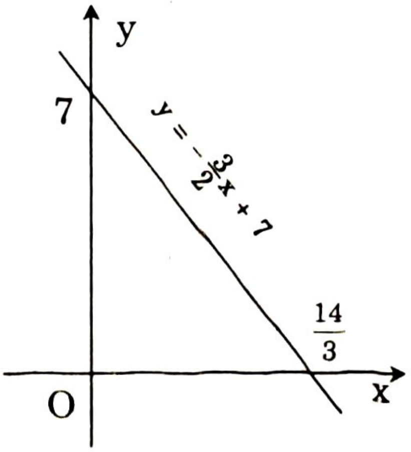
Đồ thị là một đường thẳng có hướng đi xuống, đi qua gốc toạ độ.



**c)** $y = -\frac{3}{2}x + 7$

- Tập xác định R.
- Chiều biến thiên tương tự như hàm số $y = -\frac{3}{2}x$.
- Đồ thị:

Đồ thị hàm số $y = -\frac{3}{2}x + 7$ là đường thẳng có hướng đi xuống, cắt các trục toạ độ tại các điểm $\left(\frac{14}{3}; 0\right)$ và $(0; 7)$.

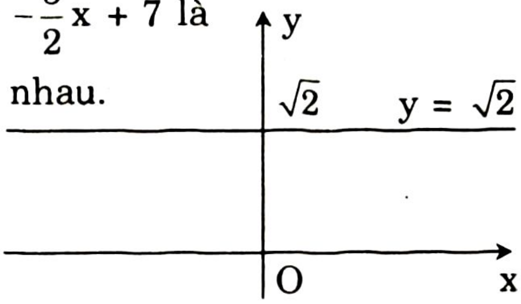


* Đồ thị hàm số $y = -\frac{3}{2}x$ và $y = -\frac{3}{2}x + 7$ là hai đường thẳng song song với nhau.

**d)** $y = \sqrt{2}$

Đây là hàm hằng;

Đồ thị song song với Ox và cắt Oy tại $(0; \sqrt{2})$.



**Bài 2** Xác định a, b để đồ thị hàm số y = ax + b đi qua các điểm sau:

**a)** $A(0; 3)$, $B(\frac{3}{5}; 0)$; **b)** $A(1; 2)$, $B(2; 1)$;

**c)** $A(15; -3)$, $B(21; -3)$.

### *Giải*

**a)** Do đồ thị hàm số y = ax + b đi qua hai điểm A(0; 3) và $B\left(\frac{3}{5}; 0\right)$

nên: $\begin{cases} 3 = a.0 + b \\ 0 = a.\frac{3}{5} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 3 \end{cases}$.

Vậy đồ thị hàm số y = −5x + 3 đi qua hai điểm A(0; 3) và $B\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

**b)** Tương tự câu (a)

$$\begin{cases} 2 = a.1 + b \\ 1 = a.2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}.$$

**c)** Tương tự câu (a)

$$\begin{cases} -3 = a.15 + b \\ -3 = a.21 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15a + b = -3 \\ 21a + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \end{cases}.$$

**Bài 3.** Viết phương trình y = ax + b của các đường thẳng:

**a)** Đi qua điểm A(4; 3), B(2; −1);

**b)** Đi qua điểm A(1; −1) và song song Ox.

### *Giải*

**a)** Đường thẳng y = ax + b đi qua các điểm A(4; 3), B(2; −1) nên a, b thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} 3 = a.4 + b \\ -1 = a.2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 3 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \end{cases}$$

Vậy phương trình là: y = 2x − 5

**b)** Do đường thẳng có phương trình y = ax + b song song với Ox nên a = 0.

Mặt khác nó lại đi qua A(1; −1) nên:

$-1 = 0.1 + b \Leftrightarrow b = -1$

Vậy đường thẳng thoả mãn đề bài có phương trình là y = −1.

**Bài 4.** Vẽ đồ thị của hàm số sau:

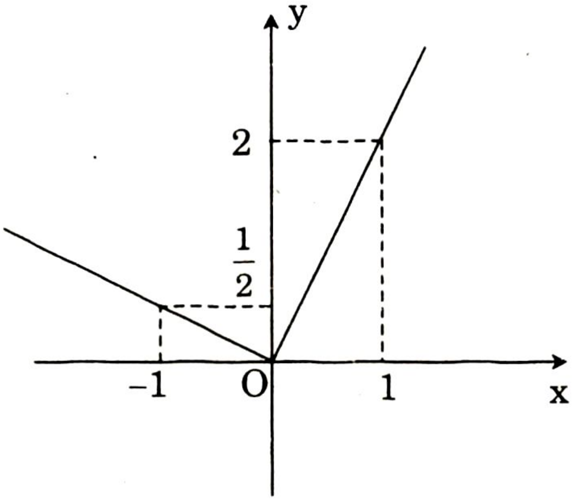
**a)** $y = \begin{cases} 2x \text{ với } x \geq 0 \\ -\dfrac{1}{2}x \text{ với } x < 0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + 1 \text{ với } x \geq 1 \\ -2x + 4 \text{ với } x < 1 \end{cases}$.

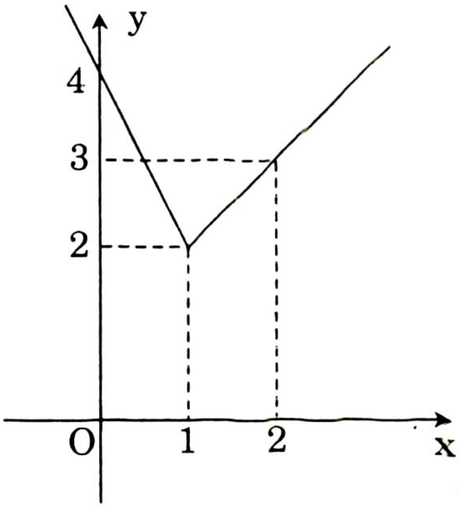
### *Giải*

**a)** Độ thị hợp bởi hai tia $y = 2x$ với $x \geq 0$ và $y = -\dfrac{1}{2}x$ với $x < 0$.

**b)** $y = \begin{cases} x + 1 \text{ với } x \geq 1 \\ -2x + 4 \text{ với } x < 1 \end{cases}$

Đồ thị gồm 2 tia nằm phía trên trục hoành.





## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 5.** Vẽ đồ thị các hàm số sau:

**a)** $y = 1 - 2x$; **b)** $y = -3$.

**Bài 6.**

**a)** Xác định a và b để đồ thị hàm số: $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(1; 3)$ và $B(2; 0)$;

**b)** Với a, b tìm được ở câu a. Hãy xác định $a'$ và $b'$ để đồ thị hàm số $y = a'x + b'$ song song với đồ thị hàm số $y = ax + b$ và đi qua $A'(1; 1)$.

**Bài 7.** Viết phương trình $y = ax + b$ của các đường thẳng

**a)** Đi qua điểm $A(1; 1)$ và song song với đường thẳng có phương trình: $y = -x + 1$;

**b)** Đi qua $B(3; 2)$ và vuông góc với đường thẳng có phương trình $y = \dfrac{1}{3}x + 4$.

**Bài 8.** Vẽ đồ thị các hàm số sau:

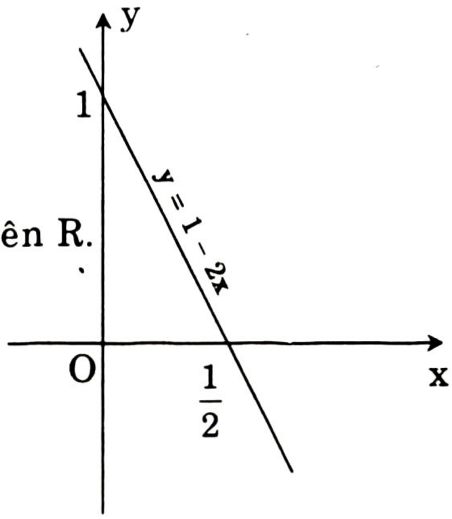
**a)** $y = |x + 1|$;  **b)** $y = \begin{cases} -3x + 3 \text{ nếu } x \geq 0 \\ 3 \text{ nếu } -1 \leq x < 0 \\ x + 4 \text{ nếu } x < -1 \end{cases}$.

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

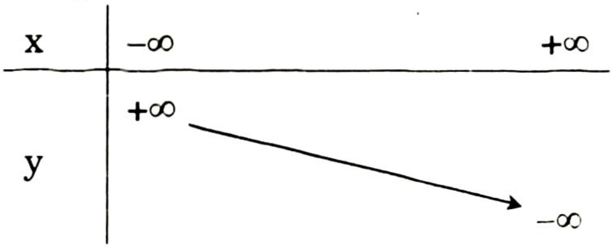
**Bài 5.**

**a)** $y = 1 - 2x$

- Tập xác định: R.
- $a = -2 < 0$ nên hàm số nghịch biến trên R.



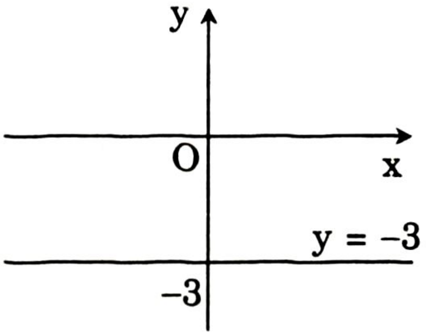
Bảng biến thiên:



- Đồ thị (hình vẽ bên)

Đồ thị là một đường thẳng có hướng đi xuống cắt hai trục toạ độ tại (0; 1) và $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

**b)** Đồ thị hàm số $y = -3$ là một đường thẳng song song với Ox và cắt Oy tại (0; –3).



**Bài 6.**

**a)** $a = -3$; $b = 6$  **b)** $a' = -3$; $b' = 4$

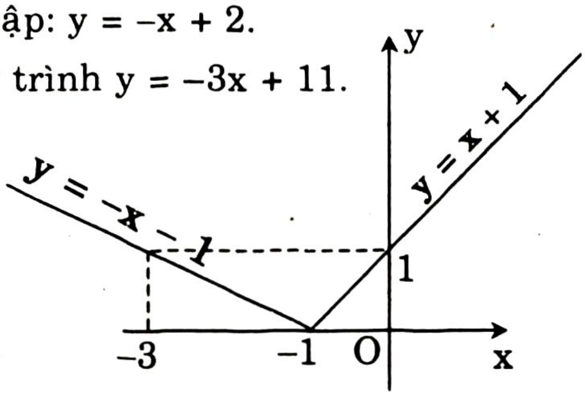
**Bài 7.**

**a)** Phương trình đường thẳng cần lập: $y = -x + 2$.

**b)** Đường thẳng cần tìm có phương trình $y = -3x + 11$.

**Bài 8.**

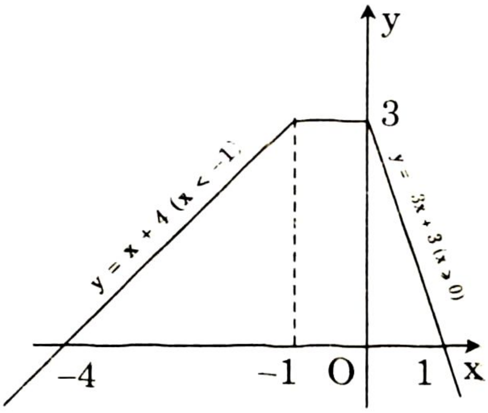
**a)** $y = |x + 1|$, hàm số này có thể viết dưới dạng:



$$y = \begin{cases} x + 1 \text{ nếu } x \geq -1 \\ -x - 1 \text{ nếu } x < -1 \end{cases}$$

Đồ thị gồm hai tia như hình bên

**b)** Đồ thị là đường gấp khúc như hình bên.



# §3. HÀM BẬC HAI

## I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**1. Hàm bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$**

**2. Tập xác định D = R**

**3. Sự biến thiên:**

Nếu a > 0 thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Nếu a < 0 thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

a > 0

| x | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | ↗ | $+\infty$ |

a < 0

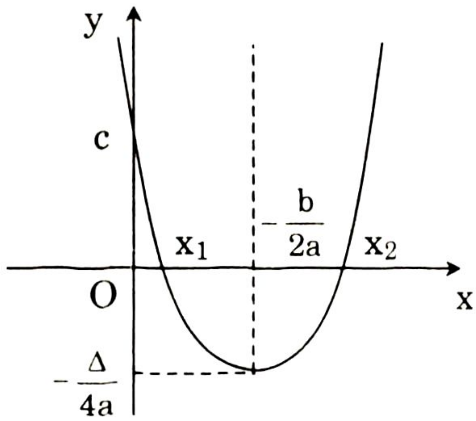
| x | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↗ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | ↘ | $+\infty$ |

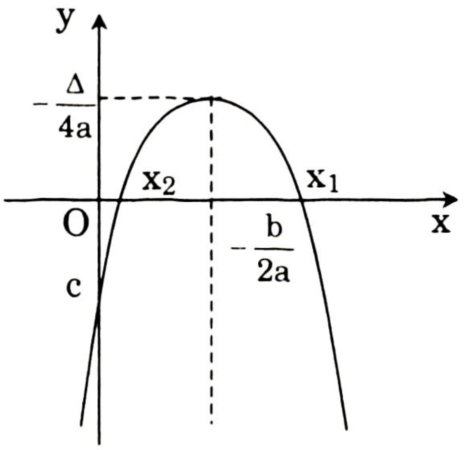
**4. Đồ thị là một đường parabol có đỉnh là $D\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$**

Gồm hai nhánh, nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng.

Nếu a > 0 bề lõm quay về phía trên.

- Nếu $a < 0$ bề lõm quay về phía dưới.


y
c
$x_1$
$-\frac{b}{2a}$
$x_2$
O
x
$-\frac{\Delta}{4a}$


y
$-\frac{\Delta}{4a}$
$x_2$
$x_1$
O
x
$-\frac{b}{2a}$
c

+ Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$;
+ Nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ chính là hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = g(x)$ và $y = f(x)$.

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số sau:

**a)** $y = 3x^2 - 4x + 1$; **b)** $y = -3x^2 + 2x - 1$;

**c)** $y = 4x^2 - 4x + 1$; **d)** $y = -x^2 + 4x - 4$;

**e)** $y = 2x^2 + x + 1$; **e)** $y = -x^2 - x - 1$.

### *Giải*

**a)** $y = 3x^2 - 4x + 1$

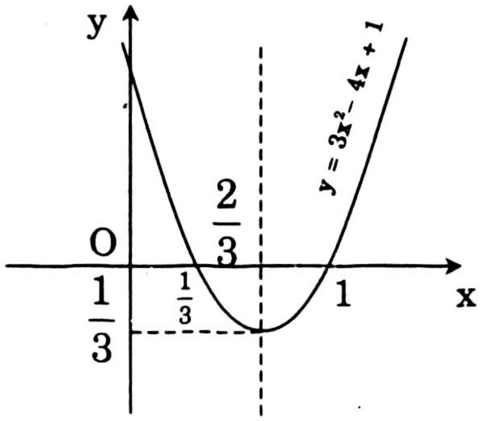
Tập xác định D = R

Chiều biến thiên

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

Bảng biến thiên:

| x | $-\infty$ |  | $\frac{2}{3}$ |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | $-\frac{1}{3}$ | ↗ | $+\infty$ |

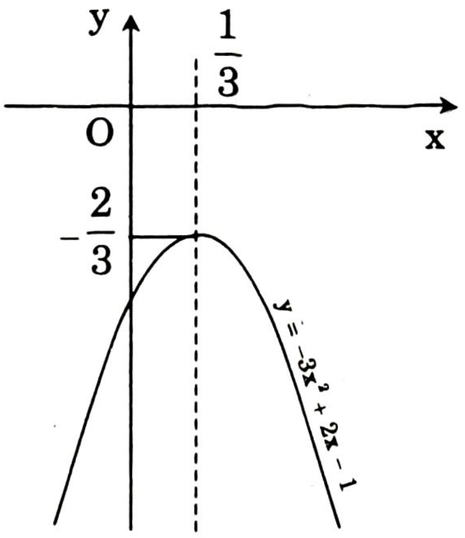


Đồ thị nhận điểm $\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ làm đỉnh, cắt trục hoành tại hai điểm $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ và (1; 0) và có trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{2}{3}$

**b)** $y = -3x^2 + 2x - 1$

Tập xác định D = R

Chiều biến thiên: Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$



Bảng biến thiên:

| x | $-\infty$ | $\frac{1}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ ↗ | $-\frac{2}{3}$ | ↘ $+\infty$ |

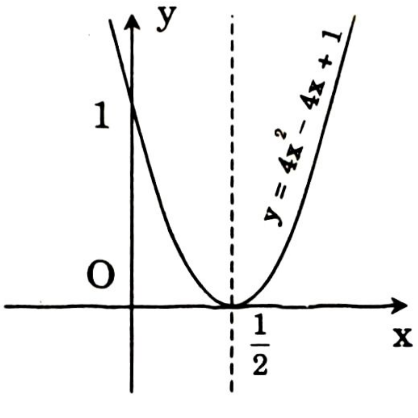
Đồ thị có trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{1}{3}$, toạ độ đỉnh $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, cắt trục tung tại điểm có toạ độ (0; –1), không cắt trục hoành.

**c)** $y = 4x^2 - 4x + 1$

Tập xác định D = R

Chiều biến thiên:

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$



Bảng biến thiên:

| x | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ ↘ | 0 | ↗ $+\infty$ |

Đồ thị có trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{1}{2}$, toạ độ đỉnh $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, tiếp xúc với trục hoành và cắt trục tung tại (0; 1).

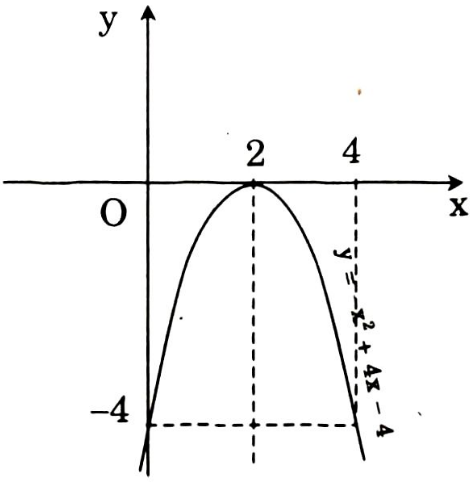
**d)** $y = -x^2 + 4x - 4$

Tập xác định D = R

Chiều biến thiên: Hàm số đồng biến trên khoảng (–∞; 2), nghịch biến trên khoảng (2; –∞).

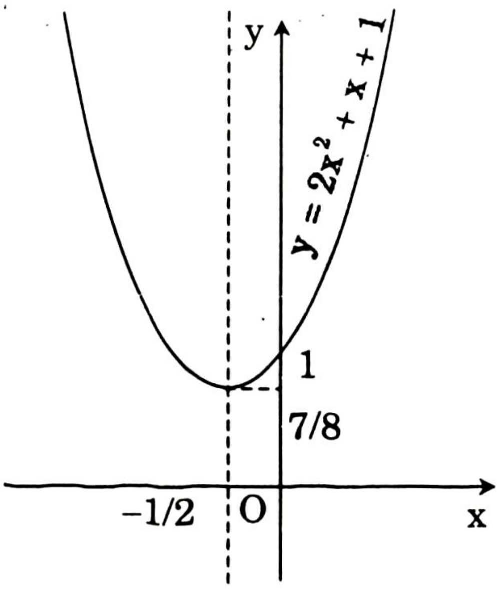
Bảng biến thiên:

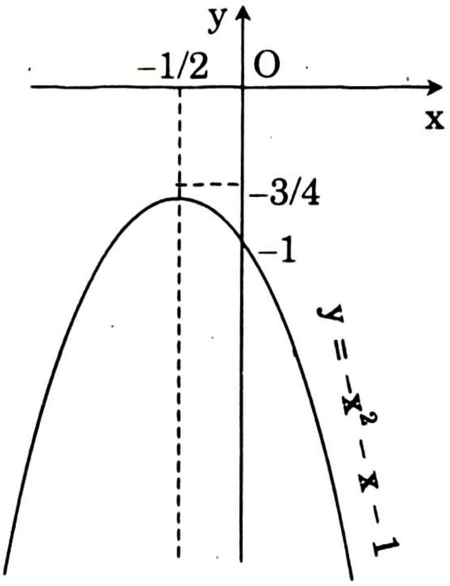
| x | –∞ |  | 2 |  | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| y |  |  | 0 |  |  |
|  |  | ↗ |  | ↘ |  |
|  | –∞ |  |  |  | –∞ |



Đồ thị có trục đối xứng là đường thẳng x = 2, tiếp xúc với trục hoành và cắt trục tung tại (0; –4)

**e)** Tương tự như các câu trên đồ thị câu e) và câu f)





**Bài 2.** Xác định toạ độ của đỉnh và các giao điểm với trục tung, trục hoành (nếu có) của mỗi parabol sau:

**a)** $y = x^2 - 3x + 2$; **b)** $y = -2x^2 + 4x - 3$;

**c)** $y = x^2 - 2x$; **e)** $y = -x^2 + 4$.

## *Giải*

**a)** $y = x^2 - 3x + 2$

+ Giao điểm của đồ thị $y = x^2 - 3x + 2$ với Oy là $(0; 2)$;
+ Giao điểm của đồ thị $y = x^2 - 3x + 2$ với Ox là $(1; 0)$ và $(2; 0)$.

**b)** $y = -2x^2 + 4x - 3$

+ Giao với Oy $(0; -3)$
+ Parabol không có giao điểm với Ox.

**c)** $y = x^2 - 2x$

+ Giao của đồ thị với Oy là điểm $(0; 0)$. Giao điểm của đồ thị với Ox là các điểm $(0; 0)$ và $(2; 0)$

**d)** $y = -x^2 + 4$

+ Giao với Oy là $(0; 4)$;
+ Giao với Ox là hai điểm $(-2; 0)$ và $(2; 0)$.

**Bài 3.** Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng parabol đó:

**a)** Đi qua $M(1; 5)$ và $N(-2; 8)$;

**b)** Đi qua $A(3; -4)$ có trục đối xứng là $x = -\frac{3}{2}$;

**c)** Có đỉnh là $I(2; -2)$;

**d)** Đi qua $B(-1; 6)$ và tung độ đỉnh là $-\frac{1}{4}$.

## *Giải*

**a)** Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua hai điểm $M(1; 5)$ và $N(-2; 8)$ nên:

$$\begin{cases} 5 = a.1^2 + b.1 + 2 \\ 8 = a(-2)^2 + b(-2) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 4a - 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy parabol là: $y = 2x^2 + x + 2$.

**b)** Theo đề bài:

$$\begin{cases} -4 = a.3^2 + b.3 + 2 \\ -\frac{3}{2} = -\frac{b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 3b = -6 \\ -6a = -2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = -2 \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy parabol đó là: $y = -\frac{1}{3}x^2 - x + 2$.

**c)** Theo đề bài:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = 2 \end{cases} \text{(thay } c = 2\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 = 16a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$$

Vậy parabol: $y = x^2 - 4x + 2$.

**d)** Theo đề bài:

$$\begin{cases} 6 = a(-1)^2 + b(-1) + 2 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 4 \\ b^2 - 4ac = a \end{cases} \text{(thay } c = 2\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 4 \\ b^2 - 9a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 16 \\ b = 12 \end{cases} \end{array} \right.$$

Vậy các parabol thoả mãn bài toán là:

$y = x^2 - 3x + 2$ và $y = 16x^2 + 12x + 2$.

**Bài 4.** Xác định a, b, c biết parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua A(8; 0) và có đỉnh I(6; –12).

### *Giải*

Theo đề bài ra thì $a \neq 0$ và:

$$\begin{cases} 0 = 64a + 8b + c \\ -\dfrac{b}{2} = 6 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64a + 8b + c = 0 \\ b = -12a \\ b^2 - 4ac = 48a \end{cases} (a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -36\,. \\ c = 96 \end{cases}$$

Vậy parabol: $y = 3x^2 - 36x + 96$.

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 5.** Cho hàm số $y = x^2 - 2mx + 3m - 2$

**a)** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$;

**b)** Tìm m để đồ thị hàm số đi qua A(1; 1).

**Bài 6.** Lập phương trình parabol

**a)** Đi qua 3 điểm A(1; 1), B(–1; 9) và C(0; 3);

**b)** Nó có đỉnh D(1; 4) và đi qua (–1; 1).

**Bài 7*.**

**a)** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 2$.

**b)** Từ đồ thị hàm số ở câu a) suy ra đồ thị hàm số

$y = x^2 - 4|x| + 2$;

**Bài 8*.** Chứng minh rằng mọi đồ thị của họ hàm số:

$y = mx^2 + (m - 1)x - 6m$ luôn luôn đi qua hai điểm cố định.

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 5.**

**a)** Khi m = 1 hàm số trở thành

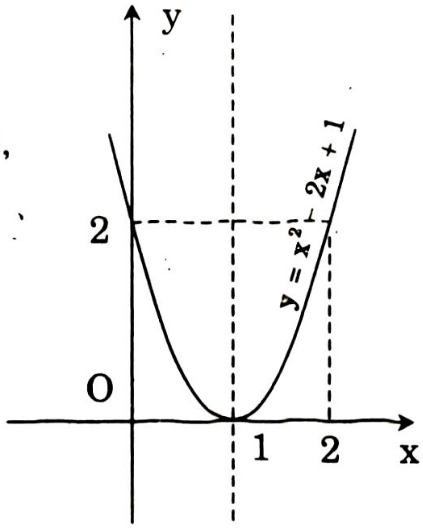
$y = x^2 - 2x + 1$

TXĐ: D = R.

Hàm số nghịch biến trên khoảng (–∞; 1), đồng biến trên khoảng (1; +∞).

Bảng biến thiên:

| x | +∞ |  | 1 |  | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | +∞ | ↘ | 0 | ↗ | +∞ |



Đồ thị có nhận đường thẳng x = 1 làm trục đối xứng và có toạ độ đỉnh là I(1; 0).

**b)** m = 2.

**Bài 6.**

**a)** Parabol có phương trình là: $y = 2x^2 - 4x + 3$.

**b)** $y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{13}{4}$.

**Bài 7*.**

**a)** $y = x^2 - 4x + 2$

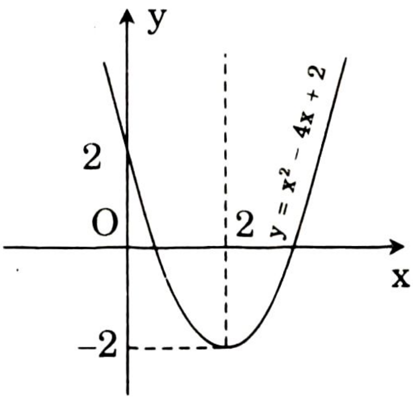
TXĐ: D = R.

Chiều biến thiên:

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$, đồng biến trên khoảng$(2; +\infty)$

Bảng biến thiên:

| x | $-\infty$ |  | 2 |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |



Đồ thị có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$, toạ độ đỉnh $I(2; -2)$

**b)** Ta thấy hàm số $y = x^2 - 4|x| + 2$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

+ Khi $x > 0$ thì: $y = x^2 - 4|x| + 2 = x^2 - 4x + 2$;

+ Khi $x < 0$ thì ta lấy đối xứng với phần đồ thị khi $x > 0$ qua Oy.

Vậy ta thu được đồ thị của hàm $y = x^2 - 4|x| + 2$.

**Bài 8*.** Họ đồ thị hàm số $y = mx^2 + (m - 1)x - 6m$ luôn luôn đi qua hai điểm cố định $(2; -2)$ và $(-3; 3)$.

# ÔN TẬP CHƯƠNG II

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

D là tập hợp khác rỗng của tập các số thực $\mathbb{R}$. Một hàm số f xác định trên tập D, là một quy tắc cho tương ứng với mỗi phần tử $x \in D$ một và chỉ một phần tử y thuộc $\mathbb{R}$. Tập D được gọi là tập xác định của hàm số f.

- Hàm số cho bởi công thức: $y = ax + b$ với $a \neq 0$; $a, b \in \mathbb{R}$; biến là x được gọi là hàm số bậc nhất.
- Hàm số bậc nhất đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $a < 0$.
- Đồ thị của hàm số bậc nhất là một đường thẳng cắt cả hai trục tọa độ. Vì vậy, để vẽ đồ thị hàm số bậc nhất ta chỉ cần xác định hai điểm thuộc đồ thị và vẽ một đường thẳng qua hai điểm đó.
- Hàm số cho bởi công thức: $y = ax^2 + bx + c$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ được gọi là hàm số bậc hai.

Nếu a > 0, hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

Nếu a < 0, hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

Đồ thị của hàm số bậc hai là một parabol, có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$. Đỉnh $D\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Phát biểu quy ước về tập xác định của hàm số cho bởi công thức.

Hai hàm số: $y = \frac{x+1}{(x+1)(x^2+2)}$ và $y = \frac{1}{x^2+2}$ có gì khác nhau?

### *Giải*

Giả sử y = f(x) là hàm số cho bởi công thức. Khi đó, tập xác định D của hàm số y = f(x) là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa. Ta có thể viết D dưới dạng:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ có nghĩa}\}$.

Hàm số $y = \frac{x+1}{(x+1)(x^2+2)}$ có tập xác định $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, còn tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{x^2+2}$ là tập $D_2 = \mathbb{R}$.

**Bài 2.** Thế nào là hàm số đồng biến, nghịch biến trên một khoảng (a; b)?

### *Giải*

- Hàm số y = f(x) được gọi là đồng biết (hay tăng) trên khoảng (a; b) nếu: $\forall x_1, x_2 \in (a; b); x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số y = f(x) được gọi là nghịch biến (hay giảm) trên khoảng (a; b) nếu: $\forall x_1, x_2 \in (a; b); x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

**Bài 3.** Thế nào là một hàm số chẵn? Thế nào là một hàm số lẻ?

### *Giải*

- Hàm số y = f(x) có tập xác định D được gọi là hàm số chẵn nếu $\forall x \in D$, thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số y = f(x) có tập xác định D được gọi là hàm số lẻ nếu $\forall x \in D$, thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

**Bài 4.** Chỉ ra khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số: $y = ax + b$, trong mỗi trường hợp $a > 0$, $a < 0$.

### *Giải*

- Khi $a > 0$, hàm số $y = ax + b$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ hay đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Khi $a < 0$, hàm số $y = ax + b$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

**Bài 5.** Chỉ ra khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số: $y = ax^2 + bx + c$, trong mỗi trường hợp $a > 0$, $a < 0$.

### *Giải*

- Khi $a > 0$, hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.
- Khi $a < 0$, hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ cho hai trường hợp:

| x | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = ax^2 + bx + c$ | $+\infty$ | ↘ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | ↗ | $+\infty$ |

Trường hợp: $a > 0$

| x | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = ax^2 + bx + c$ | $-\infty$ | ↗ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | ↘ | $-\infty$ |

Trường hợp: $a < 0$

**Bài 6.** Xác định toạ độ đỉnh, phương trình của trục đối xứng của parabol $y = ax^2 + bx + c$.

### *Giải*

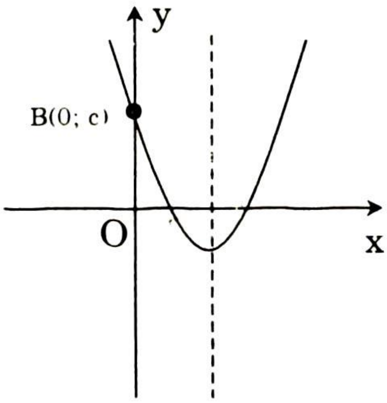
- Parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh D có toạ độ là: $D = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- Parabol $y = ax^2 + bx + c$ có phương trình trục đối xứng là: $x = -\frac{b}{2a}$.

**Bài 7.** Xác định toạ độ giao điểm của parabol $y = ax^2 + bx + c$ với trục tung. Tìm điều kiện để parabol này cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt, tại một điểm và viết toạ độ của các giao điểm trong mỗi trường hợp.

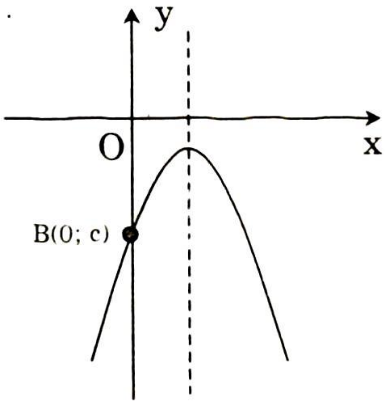
## *Giải*

- Ta biết trục tung có phương trình là: $x = 0$. Vì vậy gọi $B(x; y)$ là giao điểm của parabol $y = ax^2 + bx + c$ với trục tung thì x, y là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = c \end{cases} \Rightarrow B = (0; c)$$



(a > 0)



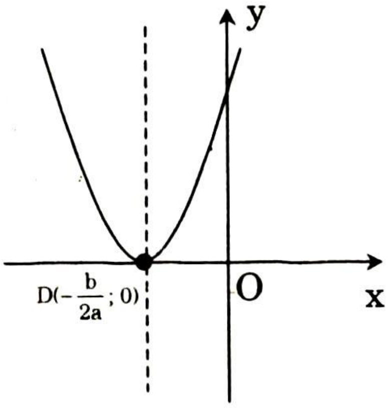
(a < 0)

- Ta đã biết trục hoành có phương trình là: $y = 0$, do đó toạ độ giao điểm $(x; y)$ (nếu có) của parabol $y = ax^2 + bx + c$ và trục hoành là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ (*)

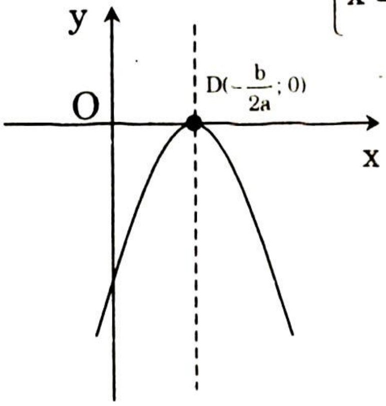
Hệ (*) tương đương với hệ: $\begin{cases} y = 0 \\ ax^2 + bx + c = 0 \quad (1) \end{cases}$

+ Nếu $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, tức là (1) vô nghiệm hay hệ (*) vô nghiệm ta suy ra hai đường không có điểm chung.

+ Nếu $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, khi đó hệ (*) tương đương với hệ: $\begin{cases} y = 0 \\ x = -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$



(a > 0)



(a < 0)

Ta suy ra parabol $y = ax^2 + bx + c$ và trục Ox có đúng một giao điểm là $D = \left(-\frac{b}{2a}; 0\right)$ (lưu ý điểm này chính là đỉnh của parabol. Khi này ta nói parabol và trục hoành tiếp xúc với nhau).

+ Nếu $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, khi đó (1) có hai nghiệm phân biệt:

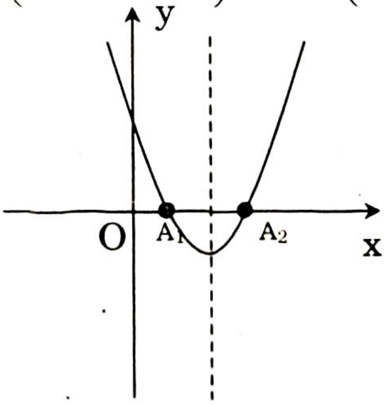
$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{hoặc} \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

nên hệ (*) tương đương với:

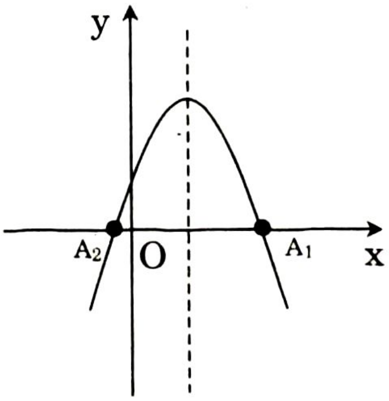
$$\begin{cases} x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ y = 0 \end{cases}.$$

Hay parabol $y = ax^2 + bx + c$ và trục hoành có hai giao điểm

$$A_1\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; 0\right), \quad A_2\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; 0\right)$$



(a > 0)



(a < 0)

**Bài 8.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

**a)** $y = \frac{2}{x+1} + \sqrt{x+3}$; **b)** $y = \sqrt{2-3x} - \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$;

**c)** $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x+3}; & x \geq 1 \\ \sqrt{2-x}; & x < 1 \end{cases}$.

## *Giải*

**a)** Biểu thức $\frac{2}{x+1} + \sqrt{x+3}$ có nghĩa khi và chỉ khi:

$$x + 1 \neq 0 \text{ và } x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ và } x \geq -3.$$

Từ đây ta có tập xác định D của hàm số là: $D = [-3; -1) \cup (-1; +\infty)$.

**b)** Biểu thức $\sqrt{2-3x} - \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ có nghĩa khi và chỉ khi:

$2 - 3x \geq 0$ và $1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$ và $x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$.

Vậy tập xác định D của hàm số đã cho là: $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

**c)** Tập xác định của hàm số là tập R vì khi $x \geq 1$ biểu thức $\frac{1}{x+3}$ luôn có nghĩa, khi $x < 1$ thì $2 - x > 0$ nên biểu thức $\sqrt{2 - x}$ có nghĩa.

**Bài 9.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

**a)** $y = \frac{1}{2}x - 1$;　　**b)** $y = 4 - 2x$;

**c)** $y = \sqrt{x^2}$;　　**d)** $y = |x + 1|$.

### *Giải*

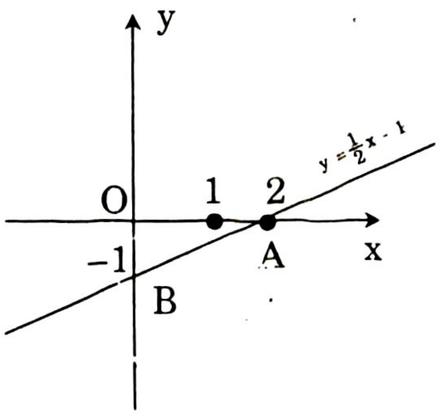
**a)** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x - 1$.

- Hàm số $y = \frac{1}{2}x - 1$ có tập xác định là R.
- Chiều biến thiên: vì hàm số $y = \frac{1}{2}x - 1$ là hàm số bậc nhất có hệ số $a = \frac{1}{2} > 0$ nên hàm số $y = \frac{1}{2}x - 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Bảng biến thiên khi x dần tới $+\infty$ thì $y = \frac{1}{2}x - 1$ dần tới $+\infty$, khi x dần tới $-\infty$ thì $y = \frac{1}{2}x - 1$ dần tới $-\infty$. Ta có bảng biến thiên:

| x | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $\infty$ |
|---|---|
| y | $-\infty \nearrow +\infty$ |

- Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x - 1$



Vì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x - 1$ là một đường thẳng nên ta chỉ việc xác định hai điểm phân biệt thuộc đồ thị, sau đó xác định đường thẳng qua hai điểm đó.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = -1$.

Cho $y = 0 \Rightarrow x = 2$.

Vậy đường thẳng qua hai điểm $A(2; 0)$ ; $B(0; -1)$ chính là đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x - 1$.

**b)** $y = 4 - 2x$

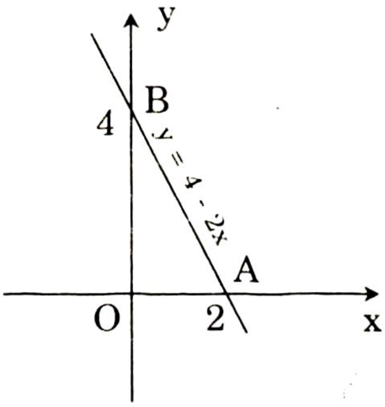
- Tập xác định của hàm số $y = 4 - 2x$ là R.
- Chiều biến thiên. Vì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất có hệ số $a = -2$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- Bảng biến thiên: Khi x dần tới $+\infty$ thì y dần tới $-\infty$, khi x dần tới $-\infty$ thì y dần tới $+\infty$. Ta có bảng biến thiên:

| x | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |

- Đồ thị hàm số $y = 4 - 2x$ là 1 đường thẳng đi qua hai điểm:

  $A(2; 0)$; $B(0; 4)$

  Đồ thị ở hình bên:



**c)** Hàm số $y = \sqrt{x^2}$ có thể viết dưới dạng $y = |x|$

- Tập xác định của hàm số $y = |x|$ là tập R.
- Chiều biến thiên:

  Theo định nghĩa của giá trị tuyệt đối, ta có:

$$y = |x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

Từ đó ta có: hàm số $y = |x|$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

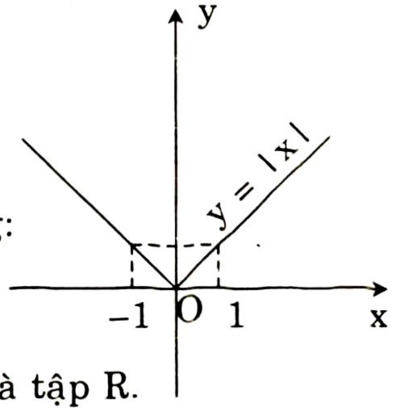
- Bảng biến thiên: khi $x > 0$ và x dần tới $+\infty$ thì $y = x$ dần tới $+\infty$. Khi $x < 0$ và dần tới $-\infty$ thì $y = -x$ dần tới $+\infty$. Ta có bảng biến thiên sau đây:

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

- Đồ thị:

Trong nửa khoảng $[0; +\infty)$ đồ thị của hàm số $y = |x|$ trùng với đồ thị hàm số $y = x$ (phần bên phải Oy)

Đồ thị có hình dạng sau:



*Chú ý:* Vì $y = |x|$ là hàm số chẵn nên đồ thị của nó đối xứng qua trục tung.

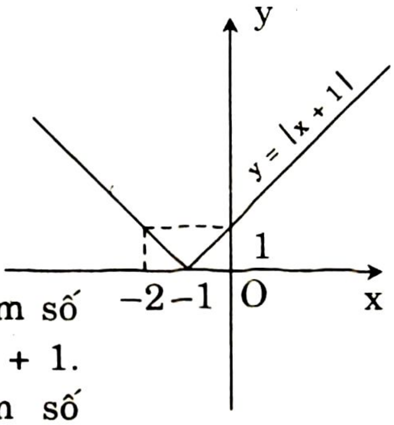
**d)** Hàm số $y = |x + 1|$ có thể viết dưới dạng:

$$y = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{nếu } x < -1 \end{cases} \quad (*)$$

- Tập xác định của hàm số $y = |x + 1|$ là tập R.
- Chiều biến thiên: Từ cách viết hàm số đã cho dưới dạng (*), ta có hàm số $y = |x + 1|$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- Bảng biến thiên: Khi $x > -1$ và x dần tới $+\infty$ thì y dần tới $+\infty$. Khi $x < -1$ và x dần tới $y = -x - 1$ dần tới $+\infty$. Ta có bảng biến thiên

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

- Đồ thị.



Trên nửa khoảng $[-1; +\infty)$ đồ thị của hàm số $y = |x + 1|$ là đồ thị của hàm số $y = x + 1$. Trên khoảng $(-\infty; -1)$ đồ thị của hàm số $y = |x + 1|$ là đồ thị của hàm số $y = -x - 1$.

**Bài 10.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

**a)** $y = x^2 - 2x - 1$; **b)** $y = -x^2 + 3x + 2$.

### *Giải*

**a)** - Hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ có tập xác định là R.

- Chiều biến thiên:

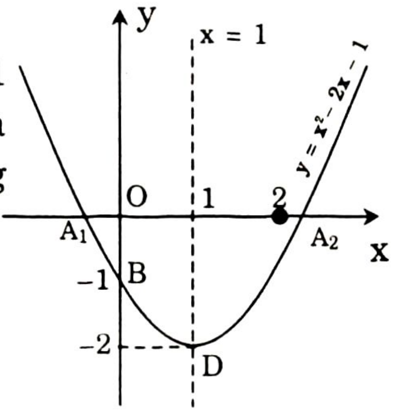
Vì hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên ta có:

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Bảng biến thiên:

| x | $-\infty$ |  | 1 |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

- Đồ thị: Đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ là một parabol có toạ độ đỉnh là D(1; −2), có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$.



Giao của đồ thị với trục Oy là B(0; −1)

Đồ thị giao với Ox tại hai điểm:

$A_1(1 - \sqrt{2}\,; 0)$; $A_2(1 + \sqrt{2}\,; 0)$

Đồ thị là hình vẽ bên:

**b)** • Hàm số $y = -x^2 + 3x + 2$ có tập xác định là tập R.

- Chiều biến thiên: Hàm số $y = -x^2 + 3x + 2$ có hệ số $a = -1 < 0$ nên ta có: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; \frac{3}{2})$ và nghịch biến trên khoảng $(\frac{3}{2}; +\infty)$.

Bảng biến thiên. Khi x dần tới $-\infty$ thì y dần tới $-\infty$, khi x dần tới $+\infty$ thì y dần tới $-\infty$, khi $x = \frac{3}{2}$ ta có $y = \frac{17}{4}$, ta có bảng biến thiên

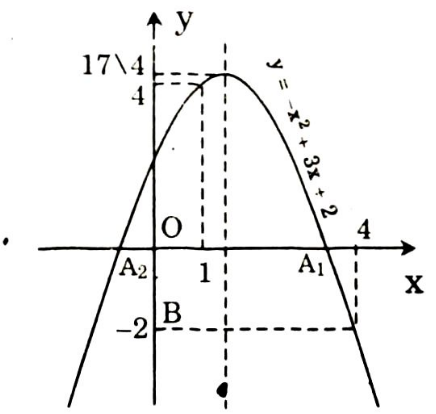
| x | $-\infty$ |  | $\frac{3}{2}$ |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $-\infty$ | ↗ | $\frac{17}{4}$ | ↘ | $-\infty$ |

- Đồ thị: đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x + 2$ là một parabol, toạ độ đỉnh là $D = (\frac{3}{2}; \frac{17}{4})$, trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{3}{2}$.

Đồ thị giao với Oy tại điểm B(0; 2).

Đồ thị giao với Ox tại hai điểm:

$A_1 = \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}; 0\right)$; $A_2 = \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; 0\right)$.



**Bài 11.** Xác định a, b biết đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(1; 3)$, $B(-1; -5)$.

### *Giải*

Vì đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $A(1; 3)$ nên $x = 1$ và $y = 3$ thoả mãn phương trình $y = ax + b$ hay $3 = a + b$ (1)

Vì đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $B(-1; 5)$ nên $x = -1$; $y = -5$ thoả mãn phương trình $y = ax + b$ hay $-5 = -a + b$ (2)

Cộng (1) và (2) vế với vế ta có: $-2 = 2b \Leftrightarrow b = -1$.

Thay $b = -1$ vào (1), ta có: $3 = a - 1 \Leftrightarrow a = 4$.

Vậy đường thẳng cần tìm có dạng: $y = 4x - 1$.

**Bài 12.** Xác định a, b, c biết parabol $y = ax^2 + bx + c$:

**a)** Đi qua ba điểm $A(0; -1)$, $B(1; -1)$, $C(-1; 1)$.

**b)** Có đỉnh $I(1; 4)$ và đi qua điểm $D(3; 0)$.

### *Giải*

**a)** Vì parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(0; -1)$ nên $x = 0$ và $y = -1$ thoả mãn phương trình $y = ax^2 + bx + c$ hay $-1 = c$. (1)

Hoàn toàn tương tự, vì parabol đi qua các điểm $B(1; -1)$ và $C(-1; 1)$ ta cũng có:

$$-1 = a + b + c \qquad (2)$$

$$1 = a - b + c \qquad (3)$$

Thay $c = -1$ ở (1) vào (2), (3) ta có:

$$a + b = 0 \text{ và } a - b = 2.$$

Từ hai phương trình trên ta suy ra $a = 1$, $b = -1$.

Vậy parabol cần tìm có phương trình là: $y = x^2 - x - 1$.

**b)** Parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(1; 4)$ nên ta có:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ y_{(1)} = a + b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a & (1) \\ a + b + c = 4 & (2) \end{cases}$$ ($y_{(1)}$ là giá trị hàm

số tại x = 1)

Parabol đi qua D(3; 0) nên ta cũng có: $9a + 3b + c = 0$ (3)

Thế (1) vào (2) và (3) ta có:

$$\begin{cases} -a + c = 4 \\ 3a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 4a = -4 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1$$

Thay a = −1 vào (1) có b = 2, thay a = −1, b = 2 vào (2) ta có c = 3.

Vậy parabol cần tìm có phương trình là:

$$y = -x^2 + 2x + 3.$$

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

**Bài 13.** Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x - 3} - \sqrt{1 - 2x}$ là

(A): $D = [-\frac{1}{2}; 3]$, (B): $D = [(3; +\infty) \cup (-\infty; \frac{1}{2})]$;

(C): $D = \varnothing$; (D): $D = R$.

**Bài 14.** Parabol $y = 3x^2 - 2x + 1$ có đỉnh là:

(A): $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$; (B): $I\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$;

(C): $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; (D): $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

**Bài 15.** Hàm số $y = x^2 - 5x + 3$

(A): Đồng biến trong khoảng $(-\infty; \frac{5}{2})$;

(B): Đồng biến trong khoảng $(\frac{5}{2}; +\infty)$;

(C): Nghịch biến trong khoảng $(\frac{5}{2}; +\infty)$;

(D): Đồng biến trong khoảng (0; 3).

## TRẢ LỜI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Trả lời đáp áp đúng:

| Bài | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|
| Đáp án đúng | (C) | (D) | (B) |

- Giải thích:

**Bài 13.** $\sqrt{x - 3} - \sqrt{1 - 2x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x - 3 \geq 0$ và $1 - 2x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \geq 3$ và $2x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 3$ và $x \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ Không tồn tại x.

Vậy tập xác định của hàm số là tập rỗng.

Vậy đáp án (C) là đúng.

**Bài 14.**

Toạ độ đỉnh của parabol $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ là $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Với parabol $y = 3x^2 - 2x + 1$ có $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{6} = \frac{1}{3}$

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4 - 4.3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

nên toạ độ đỉnh của parabol $y = 3x^2 - 2x + 1$ là $I = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, do đó đáp án (D) là đúng. Hiển nhiên các đáp án còn lại là sai.

**Bài 15.**

Ta đã biết, khi $a > 0$ hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đồng biến trên khoảng $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -\frac{b}{2a})$.

Với hàm số: $y = x^2 - 5x + 3$ có $a = 1 > 0$; $-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$, do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(\frac{5}{2}; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \frac{5}{2})$.

Vì vậy đáp án (B) là đáp án đúng.

Hiển nhiên các đáp án còn lại là sai.

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 16.** Cho hàm số: $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{4x^2 - 9}$ (1)

**a)** Tìm miền xác định của hàm số (1).

**b)** Chứng minh hàm số (1) là hàm số chẵn.

**c)** Tính giá trị của hàm số tại $x = \sqrt{5} - 1$ và $x = 1 - \sqrt{5}$.

**d)** Tìm các giá trị của x để y nhận giá trị dương.

**Bài 17.** Cho hàm số: $y = |2x + 1| + |2x - 1|$ (1)

**a)** Chứng minh hàm số (1) là hàm chẵn.

**b)** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1)

**c)** Tìm toạ độ giao điểm của đồ trị hàm số (1) và đồ thị của hàm số: $y = 2 - x^4$.

**Bài 18.** Cho hàm số: $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1$

**a)** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

**b)** Biện luận theo m số giao điểm của (C) và đồ thị hàm số y = 2x + m (m là tham số).

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 16. a)** Tập xác định D của hàm số là:

$$D = (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}; -1] \cup [1; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; +\infty).$$

**b)** Rõ ràng $\forall x \in D$, ta có $-x \in D$ (do tính đối xứng của D qua điểm O) hơn nữa nếu đặt $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{4x^2 - 9}$ thì $f(-x) = \frac{\sqrt{(-x^2) - 1}}{4(-x^2) - 9} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{4x^2 - 9} = f(x)$

điều này chứng tỏ f(x) là hàm số chẵn tức là hàm số (1) là hàm chẵn.

**c)** $f(1 - \sqrt{5}) = f(\sqrt{5} - 1) = \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{15 - 8\sqrt{5}}$

**d)** $y > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

**Bài 17. a)** f(x) = f(−x)

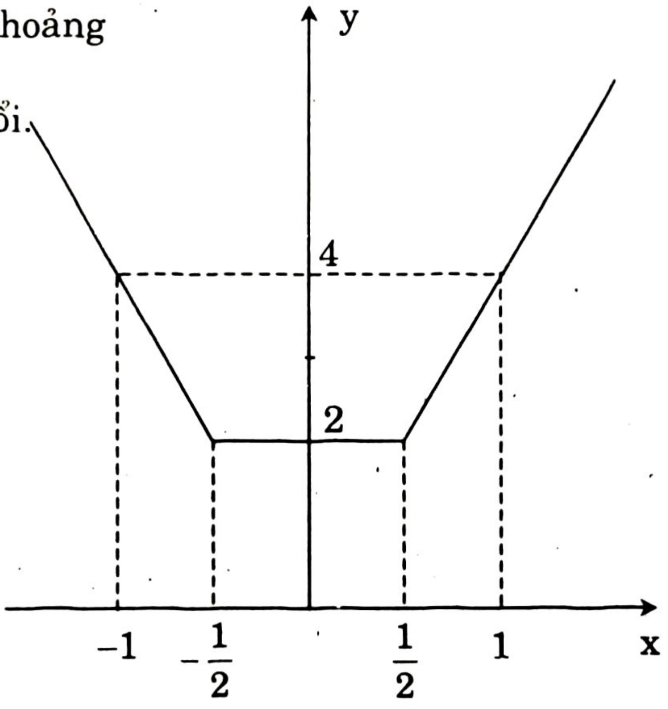
**b)** • Tập xác định của hàm số đã cho là R.

• Chiều biến thiên.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -\frac{1}{2})$, hàm số đồng biến trên khoảng $(\frac{1}{2}; +\infty)$, trên khoảng $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ hàm số là không đổi.

• Đồ thị:

Khi $x < -\frac{1}{2}$ thì đồ thị hàm số (1) là đồ thị hàm số y = −4x. Khi $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$ đồ thị hàm số là đường thẳng y = 2, khi $x \ge \frac{1}{2}$ đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số y = 4x. Ta có đồ thị là hình vẽ sau:



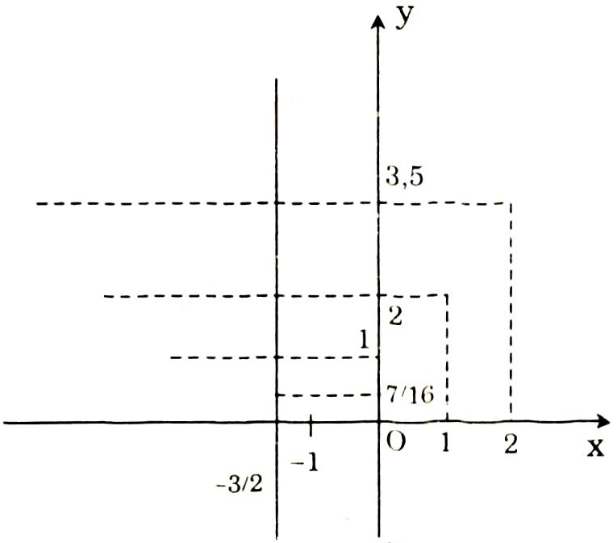
*Chú ý:* Hàm số đã cho là hàm số chẵn nên đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng.

**c)** Giao điểm là: (0; 2).

**Bài 18.**

**a)**

- Đồ thị hàm số là 1 parabol, có đỉnh là $D\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{16}\right)$, có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{3}{2}$.



**b)** * Hai đường không có giao điểm $\Leftrightarrow$ $m < -\frac{9}{16}$.

* Hai đường có đúng một giao điểm $\Leftrightarrow$ $m = -\frac{9}{16}$

* Hai đường có hai giao điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ $m > -\frac{9}{16}$.

# CHƯƠNG III

# PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## §1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

### I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Phương trình một ẩn có dạng tổng quát:** $f(x) = g(x)$(1)

Trong đó x là ẩn số, $f(x)$ và $g(x)$ là những biểu thức của x. Ta gọi $f(x)$ là vế trái, $g(x)$ là vế phải của phương trình (1).

Nếu có số thực $x_0$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ thì $x_0$ được gọi là một nghiệm của phương trình (1).

Giải phương trình (1) là tìm tất cả các nghiệm của nó (nghĩa là tìm tập nghiệm).

2. Điều kiện của phương trình là điều kiện đối với ẩn số x để $f(x)$ và $g(x)$ có nghĩa (tức mọi phép toán đều thực hiện được).

3. **Phương trình nhiều ẩn:** Ngoài các phương trình một ẩn, ta còn gặp những phương trình có nhiều ẩn, chẳng hạn:

+ Phương trình hai ẩn (x và y): $3x + y = x^2 - xy + 7$.

+ Phương trình ba ẩn (x, y và z): $x^2 + xy + 2z = 3x^2 + z^2 + zx$.

4. **Phương trình chứa tham số:** là một phương trình, ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là tham số.

Giải và biện luận phương trình chứa tham số nghĩa là xét xem khi nào phương trình vô nghiệm, có nghiệm tùy theo các giá trị của tham số và tìm các nghiệm đó.

5. **Phương trình tương đương:** Hai phương trình được gọi là tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm.

6. **Phép biến đổi tương đương:**

*Định lí:* Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương.

**a)** Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hoặc một biểu thức.

**b)** Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

7. **Phương trình hệ quả:** Nếu mỗi nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ đều là nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ thì

phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ được gọi là phương trình hệ quả của phương trình $f(x) = g(x)$. Ta viết: $f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x)$.

Phương trình hệ quả có thể có thêm nghiệm không phải là nghiệm của phương trình ban đầu. Ta gọi đó là nghiệm ngoại lai.

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Cho hai phương trình: $3x = 2$ và $2x = 3$.

Cộng các vế tương ứng của hai phương trình đã cho. Hỏi:

**a)** Phương trình nhận được có tương đương với một trong hai phương trình đã cho hay không ?

**b)** Phương trình đó có phải là phương trình hệ quả của một trong hai phương trình đã cho hay không ?

### *Giải*

Cộng hai vế tương ứng của hai phương trình: $3x = 2$ và $2x = 3$ ta:

**a)** Nhận được phương trình không tương đương với một trong hai phương trình đã cho vì chúng không có cùng tập nghiệm

**b)** Phương trình nhận được không phải là phương trình hệ quả của một trong hai phương trình đã cho vì tập nghiệm của một trong hai phương trình đã cho không nằm trong phương trình nhận được khi cộng hai vế tương ứng của hai phương trình đã cho.

**Bài 2.** Cho hai phương trình: $4x = 5$ và $3x = 4$.

Nhân các vế tương ứng của hai phương trình đã cho. Hỏi:

**a)** Phương trình nhận được có tương đương với một trong hai phương trình đã cho hay không ?

**b)** Phương trình đó có phải là phương trình hệ quả của một trong hai phương trình đã cho hay không ?

### *Giải*

Nhân các vế tương ứng của hai phương trình đã cho:

**a)** Phương trình nhận được không tương đương với một trong hai phương trình đã cho vì chúng không có cùng tập nghiệm (không tuân thủ theo phép biến đổi tương đương).

**b)** Phương trình nhận được không là phương trình hệ quả của một trong hai phương trình đã cho vì nó không chứa tập nghiệm của một trong hai phương trình đã cho.

**Bài 3.** Giải các phương trình:

**a)** $\sqrt{3-x} + x = \sqrt{3-x} + 1$ **b)** $x + \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + 2$

**c)** $\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{9}{\sqrt{x-1}}$ **d)** $x^2 - \sqrt{1-x} = \sqrt{x-2} + 3$

### *Giải*

**a)** Điều kiện: $3 - x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 3$.

Khi đó: $\sqrt{3 - x} + x = \sqrt{3 - x} + 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết hợp điều kiện, suy ra phương trình có nghiệm $x = 1$.

**b)** Điều kiện: $\begin{cases} x - 2 \ge 0 \\ 2 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Khi đó: $x + \sqrt{x - 2} = \sqrt{2 - x} + 2 \Leftrightarrow x = 2$ là nghiệm.

**c)** $\dfrac{x^2}{\sqrt{x - 1}} = \dfrac{9}{\sqrt{x - 1}}$ (3)

Điều kiện: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Khi đó: $(3) \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện, ta có phương trình có nghiệm $x = 3$.

**d)** $x^2 - \sqrt{1 - x} = \sqrt{x - 2} + 3$

Điều kiện: $\begin{cases} 1 - x \ge 0 \\ x - 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x \ge 2 \end{cases}$ vô lý.

Vậy phương trình vô nghiệm.

**Bài 4.** Giải các phương trình:

**a)** $x + 1 + \dfrac{2}{x + 3} = \dfrac{x + 5}{x + 3}$  **b)** $2x + \dfrac{3}{x - 1} = \dfrac{3x}{x - 1}$

**c)** $\dfrac{x^2 - 4x - 2}{\sqrt{x - 2}} = \sqrt{x - 2}$  **d)** $\dfrac{2x^2 - x - 3}{\sqrt{2x - 3}} = \sqrt{2x - 3}$

### *Giải*

**a)** Điều kiện: $x + 3 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne -3$. Khi đó:

$$x + 1 + \frac{2}{x + 3} = \frac{x + 5}{x + 3} \Leftrightarrow x + 1 + \frac{-x - 3}{x + 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Kết hợp điều kiện, suy ra phương trình có nghiệm $x = 0$.

**b)** Điều kiện: $x - 1 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 1$. Khi đó:

$$2x + \frac{3}{x - 1} = \frac{3x}{x - 1} \Leftrightarrow 2x + \frac{3 - 3x}{x - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{3}{2}$.

c) $\frac{x^2 - 4x - 2}{\sqrt{x - 2}} = \sqrt{x - 2}$ (1)

Điều kiện: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 0 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện phương trình có nghiệm x = 5.

d) $\frac{2x^2 - x - 3}{\sqrt{2x - 3}} = \sqrt{2x - 3}$ (2)

Điều kiện: $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

Khi đó phương trình (2) $\Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 2x - 3$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện, phương trình vô nghiệm.

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 5.** Giải các phương trình sau:

**a)** $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ **b)** $\sqrt{x - 4} = \sqrt{4 - x} + 1$

**c)** $x + \sqrt{x - 3} = 3 + \sqrt{x - 3}$ **d)** $x + \sqrt{x - 4} = 3 + \sqrt{x - 4}$

**Bài 6.** Giải các phương trình sau:

**a)** $x + \frac{1}{x - 1} = \frac{2x - 1}{x - 1}$ **b)** $\sqrt{x - 4}\,(x^2 - 4x + 3) = 0$

**c)** $\sqrt{x - 2}\,(x^2 - x - 2) = 0$ **d)** $\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x + 1}} = \frac{x + 3}{\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 1}$

**Bài 7.** Giải các phương trình sau:

**a)** $\frac{|x - 1|}{\sqrt{x - 2}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x - 2}}$ **b)** $\frac{|x - 2|}{\sqrt{x - 1}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x - 1}}$

**c)** $\frac{|x|}{\sqrt{2 - x}} = \frac{x}{\sqrt{2 - x}}$ **d)** $\frac{|x - 2|}{\sqrt{x - 3}} = \frac{2 - x}{\sqrt{x - 3}}$

**Bài 8*.** Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m.

**a)** $\frac{x}{\sqrt{x - 2}} = \frac{m}{\sqrt{x - 2}}$ **b)** $\frac{x}{\sqrt{x + m}} = \frac{x}{\sqrt{x + 1}}$

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 5.**

**a)** $x = 0$.

**b)** Phương trình vô nghiệm.

**c)** $x = 3$ là nghiệm.

**d)** Phương trình vô nghiệm.

**Bài 6.** **a)** $x = 2$ là nghiệm.

**b)** Phương trình có nghiệm $x = 4$.

**c)** Phương trình có nghiệm $x = 2$.

**d)** Phương trình có nghiệm $x = 4$.

**Bài 7.**

**a)** Phương trình có nghiệm $\forall x \in D$.

**b)** Phương trình có nghiệm $x \geq 2$.

**c)** $0 \leq x < 2$ là nghiệm của phương trình.

**d)** Phương trình vô nghiệm.

**Bài 8.**

**a)**
- Nếu $m > 2$: $x = m$ là nghiệm.
- Nếu $m \leq 2$: phương trình vô nghiệm.

**b)**
* $m \leq 0$: phương trình vô nghiệm.
* $m > 0$ và $m \neq 1$: phương trình có nghiệm $x = 0$.
* $m = 1$: phương trình có nghiệm $x > -1$.

# §2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**1. Phương trình bậc nhất:** Có dạng $ax + b = 0$ (1)

- Nếu $a = 0$, phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.
- Nếu $a \neq 0$, khi đó:

– Nếu $b \neq 0$: phương trình (1) vô nghiệm.

– Nếu $b = 0$: phương trình (1) có nghiệm $\forall x \in R$.

**2. Phương trình bậc hai có dạng:** $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ (2)

Cách giải: Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, khi đó:

- Nếu $\Delta > 0$, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Nếu $\Delta = 0$, phương trình (2) có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta < 0$, phương trình (2) vô nghiệm.

**3. Định lý Viet:**

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $u . v = P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0$.

**4.** $$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right. \end{cases}$$

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$$

**5.** $$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Giải các phương trình:

**a)** $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{2x + 3} = \dfrac{2x - 5}{4}$ **b)** $\dfrac{2x + 3}{x - 3} - \dfrac{4}{x + 3} = \dfrac{24}{x^2 - 9} + 2$

**c)** $\sqrt{3x - 5} = 3$ **d)** $\sqrt{2x + 5} = 2$

### *Giải*

**a)** Điều kiện: $2x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{3}{2}$.

Khi đó $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{2x + 3} = \dfrac{2x - 5}{4}$

$\Leftrightarrow 4(x^2 + 3x + 2) = (2x + 3)(2x - 5)$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 8 = 4x^2 - 4x - 15$

$\Leftrightarrow 16x = -23 \Leftrightarrow x = -\frac{23}{16}$ là nghiệm.

**b)** Điều kiện: $x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 3$.

Khi đó $\frac{2x+3}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{24}{x^2-9} + 2$

$\Leftrightarrow (2x+3)(x+3) - 4(x-3) = 24 + 2(x^2-9)$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 9x + 9 - 4x + 12 = 2x^2 + 6$

$\Leftrightarrow 5x = -15 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3$ (loại)

Vậy phương trình vô nghiệm.

**c)** Điều kiện: $3x - 5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{5}{3}$

Khi đó $\sqrt{3x-5} = 3 \Leftrightarrow 3x - 5 = 9 \Leftrightarrow x = \frac{14}{3}$

Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{14}{3}$.

**d)** Điều kiện: $2x + 5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{5}{2}$

Khi đó $\sqrt{2x+5} = 2 \Leftrightarrow 2x + 5 = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.

**Bài 2.** Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m.

**a)** $m(x-2) = 3x + 1$ **b)** $m^2x + 6 = 4x + 3m$

**c)** $(2m+1)x - 2m = 3x - 2$

### *Giải*

**a)** $m(x-2) = 3x + 1 \Leftrightarrow (m-3)x = 1 + 2m$ (1)

TH1: Nếu $m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$ thì (1) $\Leftrightarrow x = \frac{1+2m}{m-3}$ là nghiệm.

TH2: Nếu $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$. Khi đó (1) trở thành: $0x = 7$ vô lý.

Vậy: Với $m \neq 3$ phương trình có nghiệm $x = \frac{1+2m}{m-3}$.

Với $m = 3$ phương trình vô nghiệm.

**b)** $m^2x + 6 = 4x + 3m \Leftrightarrow (m^2-4)x = 3m - 6$ (2)

TH1: Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow x = \frac{3}{m+2}$ là nghiệm.

TH2: Nếu $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

- Với $m = 2$: khi đó (2) trở thành $0x = 0$: đúng với mọi x.
- Với $m = -2$: khi đó (2) trở thành $0x = -12$: vô lý.

Vậy: Với $m \neq \pm 2$: phương trình có nghiệm $x = \frac{3}{m+2}$.

Với $m = 2$: phương trình có vô số nghiệm.

Với $m = -2$: phương trình vô nghiệm.

**c)** $(2m + 1)x - 2m = 3x - 2 \Leftrightarrow 2(m - 1)x = 2(m - 1)$

$\Leftrightarrow (m - 1)x = m - 1 \qquad (3)$

TH1: Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$. Khi đó (3) $\Leftrightarrow x = 1$.

TH2: Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$. Khi đó (3) trở thành:

$0x = 0$: luôn đúng với mọi x.

Vậy:Với $m \neq 1$: phương trình có nghiệm $x = 1$.

Với $m = 1$: phương trình có vô số nghiệm.

**Bài 3.** Tính tuổi của một học sinh, biết rằng sau 8 năm nữa tuổi của em sẽ bằng $\frac{2}{3}$ của bình phương số tuổi của em cách đây 10 năm.

### *Giải*

Gọi số tuổi của học sinh hiện nay là x ($x > 10$, $x \in Z$).

Sau 8 năm nữa số tuổi của học sinh là $x + 8$.

Cách đây 10 năm số tuổi của học sinh là $x - 10$.

Theo bài ra: $x + 8 = \frac{2}{3}(x - 10)^2 \qquad (1)$

Giải (1) ta có:

$(1) \Leftrightarrow 3x + 24 = 2(x^2 - 20x + 100) \Leftrightarrow 2x^2 - 43x + 176 = 0 \qquad (2)$

Có $\Delta = 43^2 - 4 . 2 . 176 = 441 = 21^2$

$\Rightarrow$ (2) có nghiệm: $x_1 = \frac{43 + 21}{4} = 16$; $x_2 = \frac{43 - 21}{4} = \frac{11}{2}$ (loại)

Vậy số tuổi của học sinh hiện nay là: 16 (tuổi).

**Bài 4.** Có hai rổ quýt chứa số quýt bằng nhau. Nếu lấy 30 quả ở rổ thứ nhất đưa sang rổ thứ hai thì số quả ở rổ thứ hai bằng $\frac{1}{3}$ của bình phương số quả còn lại ở rổ thứ nhất. Hỏi số quả quýt ở mỗi rổ lúc ban đầu là bao nhiêu ?

### *Giải*

Gọi số quả quýt ở mỗi rổ lúc ban đầu là x (điều kiện: $x > 30$, $x \in Z$).

Nếu lấy 30 quả ở rổ thứ nhất chuyển sang rổ thứ hai thì số quả quýt còn lại ở rổ thứ nhất là $x - 30$, số quả quýt ở rổ thứ hai là $x + 30$.

Theo bài ra: $x + 30 = \frac{1}{3}(x - 30)^2 \qquad (1)$

Giải (1) ta có: $(1) \Leftrightarrow 3(x + 30) = (x - 30)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 63x + 810 = 0 \quad (2)$

Giải (2) có: $\Delta = 63^2 - 810 . 4 = 729 = 27^2$

$\Rightarrow$ phương trình có nghiệm: $x_1 = \dfrac{63 - 27}{2} = 18$; $x_2 = \dfrac{63 + 27}{2} = 45$

Kết hợp với điều kiện, ta có số quýt ở mỗi rổ là 45 quả.

**Bài 5.** Giải các phương trình:

**a)** $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$ **b)** $9x^4 - 30x^2 + 25 = 0$

**c)** $3x^4 + 2x^2 - 1 = 0$ **d)** $4x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

## *Giải*

**a)** $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$

Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành:

$2t^2 - 7t + 5 = 0 \quad (1)$

Có $a + b + c = 2 - 7 + 5 = 0$, suy ra phương trình (1) có nghiệm:

$t_1 = 1, \quad t_2 = \dfrac{5}{2}$.

- Với $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$ là nghiệm.
- Với $t = \dfrac{5}{2} \Rightarrow x^2 = \dfrac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ là nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm 1$; $x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

**b)** $9x^4 - 30x^2 + 25 = 0$

Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành:

$$9t^2 - 30t + 25 = 0 \Leftrightarrow (3t - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{3}$$

Với $t = \dfrac{5}{3} \Rightarrow x^2 = \dfrac{5}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

**c)** $3x^4 + 2x^2 - 1 = 0$

Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$, khi đó phương trình trở thành:

$3t^2 + 2t - 1 = 0$

Có $a - b + c = 3 - 2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1$ (loại); $t = \dfrac{1}{3}$

Với $t = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \dfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

**d)** $4x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

Đặt $t = x^2$, điều kiện $x \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành:

$$4t^2 + 3t + 2 = 0$$

Có $\Delta = 3^2 - 4 \,.\, 4 \,.\, 2 = -23 < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

**Bài 6.** Giải các phương trình:

**a)** $|3x - 2| = 2x + 3$ **b)** $|2x - 1| = |-5x - 2|$

**c)** $\dfrac{x-1}{2x-3} = \dfrac{-3x+1}{|x+1|}$ **d)** $|2x + 5| = x^2 + 5x + 1$

### *Giải*

**a)** $|3x - 2| = 2x + 3$ (1)

- Nếu $3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{2}{3}$. Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow 3x - 2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x = 5$ là nghiệm.

- Nếu $3x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{2}{3}$. Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow 2 - 3x = 2x + 3 \Leftrightarrow 5x = -1$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{5}$ là nghiệm.

*Lưu ý:* Ta có thể giải (1) như sau:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 3x - 2 = 2x + 3 \\ 2 - 3x = 2x + 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -\dfrac{1}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -\dfrac{1}{5} \end{array}\right. \text{ là nghiệm.}$$

**b)** $|2x - 1| = |-5x - 2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = -5x - 2 \\ 2x - 1 = 5x + 2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x = -1 \\ 3x = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{7} \\ x = -1 \end{array}\right. \text{ là nghiệm.}$$

**c)** Điều kiện: $\begin{cases} x + 1 \neq 0 \\ 2x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Khi đó $\dfrac{x-1}{2x-3} = \dfrac{-3x+1}{|x+1|} \Leftrightarrow |x+1|(x-1) = -6x^2 + 11x - 3$ (3)

TH1: Nếu $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Khi đó:

(3) $\Leftrightarrow x^2 - 1 = -6x^2 + 11x - 3$

$\Leftrightarrow 7x^2 - 11x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{11 \pm \sqrt{65}}{14}$ là nghiệm.

TH2: Nếu $x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$. Khi đó:

(3) $\Leftrightarrow 1 - x^2 = -6x^2 + 11x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 - 11x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{11 \pm \sqrt{41}}{10}$ không thoả mãn $x < -1$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{65}}{14}$.

**d)** $|2x + 5| = x^2 + 5x + 1$ (4)

TH1: Nếu $2x + 5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\dfrac{5}{2}$, khi đó:

(4) $\Leftrightarrow \quad 2x + 5 = x^2 + 5x + 1$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4 \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

TH2: Nếu $2x + 5 < 0 \Leftrightarrow \quad x < -\dfrac{5}{2}$, khi đó:

(4) $\Leftrightarrow \quad -2x - 5 = x^2 + 5x + 1$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -1 \quad \text{(loại)} \\ x = -6 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$; $x = -6$.

**Bài 7.** Giải các phương trình:

**a)** $\sqrt{5x + 6} = x - 6$ **b)** $\sqrt{3 - x} = \sqrt{x + 2} + 1$

**c)** $\sqrt{2x^2 + 5} = x + 2$ **d)** $\sqrt{4x^2 + 2x + 10} = 3x + 1$.

## *Giải*

$$\textbf{a)} \quad \sqrt{5x + 6} = x - 6 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 6 \geq 0 \\ 5x + 6 = (x - 6)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x^2 - 17x + 30 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 6 \\ \left[\begin{array}{l} x = 15 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 15$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 15$.

*Lưu ý:* Ta có thể trình bày như sau:

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 6$ (*)

Khi đó bình phương 2 vế của phương trình ta được:

$$\sqrt{5x + 6} = x - 6 \quad \Leftrightarrow \quad 5x + 6 = x^2 - 12 + 36$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 17x + 30 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 15 \end{array}\right.$$

Kết hợp với (*), suy ra phương trình có nghiệm $x = 15$.

**b)** $\sqrt{3 - x} = \sqrt{x + 2} + 1$ (2)

Điều kiện: $\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$ (*)

Khi đó:(2) $\Leftrightarrow 3 - x = x + 2 + 1 + 2\sqrt{x + 2} \Leftrightarrow \sqrt{x + 2} = -x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ x + 2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \ 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = -1$$

Kết hợp điều kiện (*) ta có phương trình có nghiệm $x = -1$.

**c)** $\sqrt{2x^2 + 5} = x + 2$ (3)

Điều kiện phương trình có nghiệm: $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

Khi đó (3) $\Leftrightarrow 2x^2 + 5 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{3}$ là nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 2 \pm \sqrt{3}$ .

**d)** $\sqrt{4x^2 + 2x + 10} = 3x + 1$ (4)

Điều kiện phương trình có nghiệm: $3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$.

Khi đó (4) $\Leftrightarrow 4x^2 + 2x + 10 = 9x^2 + 6x + 1$

$$\Leftrightarrow \quad 5x^2 + 4x - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{9}{5} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện, phương trình có nghiệm $x = 1$.

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 8.** Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m:

**a)** $\dfrac{(m + 1)x + m - 2}{x + 3} = m$ **b)** $|x + m| = |x - m + 2|$

**Bài 9*.** Giải phương trình:

**a)** $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$ **b)** $(x + 1)(x + 2)(x + 4)(x + 5) = 10$

**c)** $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$ **d)** $(x + 1)^4 + (x - 3)^4 = 82$

**Bài 10*.** Giải các phương trình:

a) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3}$ b) $1 + \sqrt{x - \sqrt{x+8}} = \sqrt{x+1}$

c) $\sqrt{x^2+3} = x + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2-1}}$

d) $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = \sqrt{(3+x)(6-x)} + 3$

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 8.**

a) $m \neq -\dfrac{5}{2}$: phương trình có nghiệm $x = 2m + 2$.

$m = -\dfrac{5}{2}$: phương trình vô nghiệm.

b)
- Nếu $m = 1$: $\forall x \in R$ là nghiệm.
- Nếu $m \neq 1$: phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

**Bài 9.** Đáp số:

a) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$)

b) $x = -3 \pm \sqrt{6}$ (Đặt $t = x^2 + 6x + 5$)

c) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{6}$ (Đặt $t = x - \dfrac{1}{x}$)

d) $x = 0$; $x = 2$ (Đặt $t = x - 1$)

**Bài 10.**

a) $x = -\dfrac{1}{2}$ b) $x = 8$

c) $x = 1$; $x = -\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ d) $x = -3$; $x = 6$.

# §3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**1.** Phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát là: $ax + by = c$ (1)

Trong đó x và y là hai ẩn; a, b, c là các số thực đã cho, với điều kiện a và b không đồng thời bằng 0.

Nếu tồn tại hai số thực $x_0$, $y_0$ sao cho $ax_0 + by_0 = c$ thì cặp $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của phương trình (1).

Giải phương trình (1) là tìm tập nghiệm của nó.

**2.** Hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát là:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (2)$$

Trong đó cả hai phương trình đều là phương trình bậc nhất hai ẩn.
Nếu tồn tại cặp số $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình của hệ thì $(x_0; y_0)$ gọi là một nghiệm của hệ phương trình (2).
Giải hệ phương trình (2) là tìm tập nghiệm của nó.

**3.** Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (3)$$

Trong đó x, y, z là ba ẩn số; các chữ số còn lại là các hệ số.
Mỗi bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ nghiệm đúng cả ba phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình (3).
Giải hệ phương trình (3) là tìm tập nghiệm của nó.

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 7x - 5y = 9 \\ 14x - 10y = 10 \end{cases}$

Tại sao không cần giải ta cũng kết luận được hệ phương trình này vô nghiệm ?

### *Giải*

Do $\dfrac{7}{14} = \dfrac{-5}{-10} \neq \dfrac{9}{10} \Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm.

**Bài 2.** Giải các hệ phương trình:

**a)** $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$　　**b)** $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3}x - \dfrac{3}{4}y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$　　**d)** $\begin{cases} 0,3x - 0,2y = 0,5 \\ 0,5x + 0,4y = 1,2 \end{cases}$

### *Giải*

**a)** $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 & (1) \\ x = 3 - 2y & (2) \end{cases}$

Thế (2) vào (1) suy ra:

$$2(3 - 2y) - 3y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -7y = -5 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{5}{7}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{11}{7} \\ y = \dfrac{5}{7} \end{cases}$

**b)** $$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 8x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 9 \\ y = \dfrac{5 - 3x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{11} \\ y = \dfrac{7}{11} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{9}{11} \\ y = \dfrac{7}{11} \end{cases}$

**c)** $$\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3}x - \dfrac{3}{4}y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ 4x - 9y = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12y = -2 \\ x = \dfrac{4 - 3y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{6} \\ x = \dfrac{9}{8} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{9}{8} \\ y = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$

**d)** $$\begin{cases} 0,3x - 0,2y = 0,5 \\ 0,5x + 0,4y = 1,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 4y = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4y = 10 \\ 5x + 4y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 22 \\ y = \dfrac{12 - 5x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

**Bài 3.** Hai bạn Vân và Lan đến cửa hàng mua trái cây. Bạn Vân mua 10 quả quýt, 7 quả cam với giá tiền là 17800 đồng. Bạn Lan mua 12 quả quýt, 6 quả cam hết 18000 đồng. Hỏi giá tiền mỗi quả quýt và mỗi quả cam là bao nhiêu ?

### *Giải*

Gọi x, y lần lượt là số tiền mỗi quả quýt và mỗi quả cam ($0 < x, y < 17800$; x, y tính bằng đồng).

Theo bài ra ta có: $10x + 7y = 17800$ (1)

$12x + 6y = 18000$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} 10x + 7y = 17800 \\ 12x + 6y = 18000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 800 \\ y = 1400 \end{cases}$

Vậy:Giá tiền mỗi quả quýt là: 800 đồng.

Giá tiền mỗi quả cam là: 1400 đồng.

**Bài 4.** Trong một xí nghiệp may có hai dây chuyền may áo sơ mi. Tháng thứ nhất cả hai dây chuyền may được 930 áo. Tháng thứ hai dây chuyền thứ nhất tăng năng suất 18%, dây chuyền thứ hai tăng 15% nên cả hai dây chuyền may được 1083 áo. Hỏi tháng thứ nhất mỗi dây chuyền may được bao nhiêu áo ?

### *Giải*

Gọi số áo ở tháng thứ nhất của hai dây chuyền một và hai may được lần lượt là x, y ($0 < x, y < 930$; x, y tính bằng chiếc) .

Theo bài ra: $x + y = 930$ (1)

Do tháng thứ hai tăng năng suất, dây chuyền một tăng 18%, dây chuyền hai tăng 15% nên đã may được 1083 áo, vậy:

$$\frac{118}{100}x + \frac{115}{100}y = 1083 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ:

$$\begin{cases} x + y = 930 & (1) \\ \frac{118}{100}x + \frac{115}{100}y = 1083 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 930 - y \\ 118x + 115y = 108300 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 930 - y \\ 118(930 - y) + 115y = 108300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 450 \\ y = 480 \end{cases}$$

Vậy: Tháng thứ nhất dây chuyền một may được 450 áo.

Tháng thứ nhất dây chuyền hai may được 480 áo.

**Bài 5.** Giải hệ phương trình:

**a)** $\begin{cases} x + 3y + 2z = 8 \\ 2x + 2y + z = 6 \\ 3x + y + z = 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 3y + 2z = -7 \\ -2x + 4y + 3z = 8 \\ 3x + y - z = 5 \end{cases}$

### *Giải*

**a)** $$\begin{cases} x - 3y + 2z = 8 & (1) \\ 2x + 2y + z = 6 & (2) \\ 3x + y + z = 6 & (3) \end{cases}$$

Lấy (3) trừ đi (2) vế cho vế ta được:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 8 \\ 2x + 2y + z = 6 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 4x + 2z = 8 \\ 4x + z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

**b)** $$\begin{cases} x - 3y + 2z = -7 \\ -2x + 4y + 3z = 8 \\ 3x + y - z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6y + 4z = -14 & (1) \\ -2x + 4y + 3z = 8 & (2) \\ 3x + y - z = 5 & (3) \end{cases}$$

Lấy (1) cộng (2) vế cho vế ta được:

$$\begin{cases} -2y + 7z = -6 & (4) \\ -2x + 4y + 3z = 8 & (2) \\ 3x + y - z = 5 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y + 7z = -6 \\ -6x + 12y + 9z = 24 \\ 6x + 2y - 2z = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y + 7z = -6 \\ 14y + 7z = 34 \\ 3x + y - z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16y = 40 \\ -2y + 7z = -6 \\ 3x + y - z = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5}{2} \\ z = \dfrac{2y - 6}{7} \\ x = \dfrac{5 - y + z}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5}{2} \\ z = -\dfrac{1}{7} \\ x = \dfrac{11}{14} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{11}{14} \\ y = \dfrac{5}{2} \\ z = -\dfrac{1}{7} \end{cases}$

**Bài 6.** Một cửa hàng bán áo sơ mi, quần âu nam và váy nữ. Ngày thứ nhất bán được 12 áo, 21 quần và 18 váy, doanh thu là 5349000 đồng. Ngày thứ hai bán được 16 áo, 24 quần và 12 váy, doanh thu là 5600000 đồng. Ngày thứ ba bán được 24 áo, 15 quần và 12 váy, doanh thu là 5259000 đồng. Hỏi giá bán mỗi áo, mỗi quần và mỗi váy là bao nhiêu ?

### *Giải*

Gọi x, y, z lần lượt là giá tiền mỗi áo, mỗi quần và mỗi váy ($0 < x, y, z < 5259000$; x, y, z tính bằng đồng).

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 12x + 21y + 18z = 5349000 \\ 16x + 24y + 12z = 5600000 \\ 24x + 15y + 12z = 5259000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 7y + 6z = 1783000 \\ 4x + 6y + 3z = 1400000 \\ 8x + 5y + 4z = 1753000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 98000 \\ y = 125000 \\ z = 86000 \end{cases}$$

Vậy: Giá bán mỗi áo là: 98000 đồng.
Giá bán mỗi quần là: 125000 đồng.
Giá bán mỗi váy là: 86000 đồng.

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 7.** Giải các hệ phương trình:

**a)** $\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 1 \\ 5x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \end{cases}$

**Bài 8*.** Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 4y = m^2 + 4 \\ x + (m + 3)y = 2m + 3 \end{cases}$

**a)** Với các giá trị nào của m thì hệ có nghiệm duy nhất (x; y) thoả mãn điều kiện $x \geq y$.

**b)** Với các giá trị của m đã tìm được, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $x + y$.

**Bài 9.** Tìm các giá trị của b sao cho với mọi $a \in R$ thì hệ phương trình:

$\begin{cases} x + 2ay = b \\ ax + (1 - a)y = b^2 \end{cases}$ có nghiệm.

**Bài 10*.** Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my - 3m = 0 \\ mx + y - 2m - 1 = 0 \end{cases}$

**a)** Xác định m để hệ phương trình có nghiệm.

**b)** Gọi (x; y) là nghiệm của hệ. Tìm hệ thức giữa x và y độc lập với m.

c) Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm $x \in [0^\circ; 180^\circ]$.

$$\begin{cases} \sin x + m\cos x - 3m = 0 \\ m\sin x + \cos x - 2m - 1 = 0 \end{cases}$$

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 7. a)** $\begin{cases} x = \dfrac{59}{73} \\ y = -\dfrac{61}{73} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + 5} \\ y = -\dfrac{2}{\sqrt{6} + 5} \end{cases}$

**Bài 8. a)** $m > 1$; **b)** Không có giá trị nhỏ nhất.

**Bài 9.** $b = 0$.

**Bài 10.**

**a)** $m \neq \pm 1$.

**b)** $x - y + 1 = 0$.

**c)** Đặt $u = \sin x$, $v = \cos x$

*Đáp số*: $-\dfrac{1}{4} \leq m \leq 0$.

# ÔN TẬP CHƯƠNG III

## I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**1.** Hai phương trình được gọi là tương đương khi chúng có cùng một tập nghiệm.

**2.** Phép biến đổi tương đương: Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương.

**a)** Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hoặc cùng một biểu thức.

**b)** Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

**3.** Nếu mỗi nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ đều là nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ thì phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ được gọi là phương trình hệ quả của phương trình $f(x) = g(x)$.

**4.** Phương trình bậc nhất có dạng $ax + b = 0$ $(a, b \in R)$

- Nếu $a \neq 0$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{b}{a}$.
- Nếu $a = 0$, khi đó:

  + Nếu $b \neq 0$ phương trình vô nghiệm.

+ Nếu b = 0 phương trình có vô số nghiệm.

**5.** Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

Cách giải: Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = b' - ac$ với $b' = \frac{b}{2}$)

- Nếu $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \left(\text{hoặc } x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}\right)$$

- Nếu $\Delta = 0$: phương trình có nghiệm kép: $x = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm.

**6.** Định lí Viet: Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ thì: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 . x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $u . v = P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình: $X^2 - SX + P = 0$.

**7.** + Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là phương trình có dạng tổng quát $ax + by = c$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$

+ Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Cách giải:

1) Sử dụng phương pháp thế.
2) Sử dụng cộng vế với vế.
3) Sử dụng định thức:

Đặt $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$.

$Dx = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$.

$Dy = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$.

- Nếu $D \neq 0$ khi đó hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = \frac{Dx}{D} \\ y = \frac{Dy}{D} \end{cases}$

- Nếu D = 0, khi đó:
  - + Nếu Dx = 0 hoặc Dy = 0 hệ phương trình vô nghiệm.
  - + Nếu Dx = Dy = 0, lúc đó nghiệm của hệ phương trình là nghiệm của phương trình $a_1x + b_1y = c_1$ hoặc $a_2x + b_2y = c_2$.

**8.** Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Cách giải: Sử dụng cộng vế với vế để trở về dạng tam giác.

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Khi nào hai phương trình được gọi là tương đương ? Cho ví dụ.

### *Giải*

Hai phương trình được gọi là tương đương khi chúng có cùng một tập nghiệm.

Ví dụ:

**a)** Hai phương trình: $2x + 4 = 0$ và $x + 2 = 0$.

**b)** Hai phương trình:

$$x + 1 = 3x - 2 \text{ và } x + 1 + \sqrt{x^2 + 1} = 3x - 2 + \sqrt{x^2 + 1}$$

**Bài 2.** Nêu ví dụ về phương trình hệ quả.

### *Giải*

Giải phương trình $x - 2 = \sqrt{x}$ (1)

Bình phương hai vế của (1) ta được: $x^2 - 4x + 4 = x$ (1')

khi đó (1') gọi là phương trình hệ quả của phương trình (1). Thật vậy:

$$x^2 - 4x + 4 = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Thử vào (1), ta thấy $x = 1$ không là nghiệm của (1), $x = 4$ là nghiệm của (1).

**Bài 3.** Giải các phương trình:

**a)** $\sqrt{x - 5} + x = \sqrt{x - 5} + 6$ **b)** $\sqrt{1 - x} + x = \sqrt{x - 1} + 2$

**c)** $\dfrac{x^2}{\sqrt{x - 2}} = \dfrac{8}{\sqrt{x - 2}}$ **d)** $3 + \sqrt{2 - x} = 4x^2 - x + \sqrt{x - 3}$

### *Giải*

**a)** $\sqrt{x - 5} + x = \sqrt{x - 5} + 6$ (1)

Tập xác định: $D = [5; +\infty)$, khi đó: (1) $\Leftrightarrow x = 6$ thoả mãn D.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 6$.

**b)** Tập xác định: $D = \{1\}$

Với $x = 1 \Rightarrow \sqrt{1-1} + 1 = \sqrt{1-1} + 2$ vô lý

Vậy phương trình vô nghiệm.

**c)** Tập xác định: $D = (2; +\infty)$.

Khi đó: $\dfrac{x^2}{\sqrt{x-2}} = \dfrac{8}{\sqrt{x-2}} \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

Kết hợp điều kiện, suy ra $x = 2\sqrt{2}$ là nghiệm.

**d)** Phương trình xác định khi: $\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases}$ vô lý

Vậy phương trình vô nghiệm.

**Bài 4.** Giải các phương trình:

**a)** $\dfrac{3x+4}{x-2} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{4}{x^2-4} + 3$ **b)** $\dfrac{3x^2-2x-3}{2x-1} = \dfrac{3x-5}{2}$

**c)** $\sqrt{x^2-4} = x - 1$

### *Giải*

**a)** Tập xác định: $D = R \setminus \{\pm 2\}$, khi đó:

$$\frac{3x+4}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^2-4} + 3$$

$\Leftrightarrow (3x+4)(x+2) - (x-2) = 4 + 3(x^2-4)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 10x + 8 - x + 2 = 4 + 3x^2 - 12$

$\Leftrightarrow 9x = -18 \Leftrightarrow x = -2$ (loại)

Vậy phương trình vô nghiệm.

**b)** Tập xác định: $D = R \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, khi đó:

$$\frac{3x^2-2x-3}{2x-1} = \frac{3x-5}{2}$$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 4x - 6 = (2x-1)(3x-5)$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 4x - 6 = 6x^2 - 13x + 5$

$\Leftrightarrow 9x = 11 \Leftrightarrow x = \dfrac{11}{9}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{11}{9}$.

**c)** Tập xác định $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{array}\right.$

hay tập xác định $D = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Khi đó:

+ Nếu $x \le -2$ thì $x - 1 < 0$ ⇒phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $x \ge 2$, lúc đó:

$$\sqrt{x^2 - 4} = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 = (x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = 5$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{2} \text{ là nghiệm.}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{5}{2}$.

**Bài 5.** Giải các hệ phương trình:

**a)** $\begin{matrix} -2x + 5y = 9 \\ 4x + 2y = 11 \end{matrix}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 5x - 2y = 7 \end{cases}$

**c)** $\begin{matrix} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 2y = 8 \end{matrix}$ **d)** $\begin{cases} 5x + 3y = 15 \\ 4x - 5y = 6 \end{cases}$

## *Giải*

**a)** Ta có: $D = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -24 \neq 0.$

$$Dx = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 9 \,.\, 2 - 11 \,.\, 5 = -37$$

$$Dy = \begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = -2 \,.\, 11 - 4 \,.\, 9 = -58$$

⇒ hệ có nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{Dx}{D} = \dfrac{-37}{-24} = \dfrac{37}{24} \\ y = \dfrac{Dy}{D} = \dfrac{-58}{-24} = \dfrac{29}{12} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{37}{24} \\ y = \dfrac{29}{12} \end{cases}$

**b)** Ta có: $D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \,.\, (-2) - 5 \,.\, 4 = -26 \neq 0$

$$Dx = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -2 \,.\, 12 - 7 \,.\, 4 = -52$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \,.\, 7 - 5 \,.\, 12 = -39$$

$\Rightarrow$ hệ có nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{Dx}{D} = \dfrac{-52}{-26} = 2 \\ y = \dfrac{Dy}{D} = \dfrac{-39}{-26} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

**c)** Ta có: $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \,.\, 2 - 3 \,.\, (-3) = 13$

$Dx = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 2 \,.\, 5 - 8 \,.\, (-3) = 34$

$Dy = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \,.\, 8 - 3 \,.\, 5 = 1$

$\Rightarrow$ hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{Dx}{D} = \dfrac{34}{13} \\ y = \dfrac{Dy}{D} = \dfrac{1}{13} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{34}{13} \\ y = \dfrac{1}{13} \end{cases}$

**d)** Ta có: $D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 5 \,.\, (-5) - 4 \,.\, 3 = -37 \neq 0$

$Dx = \begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = -5 \,.\, 15 - 6 \,.\, 3 = -93$

$Dy = \begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 5 \,.\, 6 - 4 \,.\, 15 = -30$

$\Rightarrow$ hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{Dx}{D} = \dfrac{-93}{-37} = \dfrac{93}{37} \\ y = \dfrac{Dy}{D} = \dfrac{-30}{-37} = \dfrac{30}{37} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{93}{37} \\ y = \dfrac{30}{37} \end{cases}$

**Bài 6.** Hai công nhân được giao việc sửa một bức tường. Sau khi người thứ nhất làm được 7 giờ và người thứ hai làm được 4 giờ thì họ sơn được $\frac{5}{9}$ bức tường. Sau đó họ cùng làm việc với nhau trong 4 giờ nữa thì chỉ còn lại $\frac{1}{18}$ bức tường chưa sơn. Hỏi nếu mỗi người làm việc riêng thì sau bao nhiêu giờ mỗi người mới sơn xong bức tường ?

### *Giải*

Gọi x, y lần lượt là số giờ mà người thứ nhất, người thứ hai mỗi người sơn xong bức tường ( $x > 11$; $y > 8$ , x, y tính bằng giờ).

Sau 1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc.

Sau 1 giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

Suy ra: Sau 7 giờ người thứ nhất làm được $\frac{7}{x}$ công việc.

Sau 4 giờ người thứ hai làm được $\frac{4}{y}$ công việc.

Theo bài ra: $\frac{7}{x} + \frac{4}{y} = \frac{5}{9}$ (1)

Mặt khác: sau khi làm được $\frac{5}{9}$ công việc, họ cùng làm thêm 4 giờ.

$\Rightarrow$ Người thứ nhất đã làm được $\frac{11}{x}$ công việc.

Người thứ hai đã làm được $\frac{8}{y}$ công việc.

Theo bài ra: $\frac{11}{x} + \frac{8}{y} = \frac{17}{18}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{7}{x} + \frac{4}{y} = \frac{5}{9} \\ \frac{11}{x} + \frac{8}{y} = \frac{17}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{14}{x} + \frac{8}{y} = \frac{10}{9} & (3) \\ \frac{11}{x} + \frac{8}{y} = \frac{17}{18} & (4) \end{cases}$$

Trừ (3) cho (4) vế với vế ta được:

$$\frac{3}{x} = \frac{3}{18} \quad \Leftrightarrow \quad x = 18 \quad \Rightarrow \quad y = 24$$

Kết hợp với điều kiện ta có:

Người thứ nhất làm một mình xong công việc hết 18 giờ.

Người thứ hai làm một mình xong công việc hết 24 giờ.

**Bài 7.** Giải các hệ phương trình:

**a)** $\begin{cases} 2x - 3y + z = -7 \\ -4x + 5y + 3z = 6 \\ x + 2y - 2z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ -2x + 3y + z = -6 \\ 3x + 8y - z = 12 \end{cases}$

### *Giải*

**a)** $\begin{cases} 2x - 3y + z = -7 & (1) \\ -4x + 5y + 3z = 6 & (2) \\ x + 2y - 2z = 5 & (3) \end{cases}$

Nhân vào hai vế của (1) với 3 rồi trừ vế cho vế vào phương trình (2).

Nhân vào hai vế của (1) với 2 rồi cộng vế với vế vào phương trình (3) ta được:

$$(1)\,(2)\,(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 14y = -27 \\ 5x - 4y = -9 \\ x + 2y - 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 14y = -27 & (1') \\ 10x - 8y = -18 & (2') \\ x + 2y - 2z = 5 & (3') \end{cases}$$

Lấy phương trình (1′) trừ (2′) vế với vế ta được:

$$(1')\,(2')\,(3') \Leftrightarrow \begin{cases} -6y = -9 \\ 10x - 8y = -18 \\ x + 2y - 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{2} \\ x = -\dfrac{3}{5} \\ z = -\dfrac{13}{10} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm: $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{3}{2} \\ z = -\dfrac{13}{10} \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 & (4) \\ -2x + 3y + z = -6 & (5) \\ 3x + 8y - z = 12 & (6) \end{cases}$

Lấy (5) cộng với (6) vế với vế, lấy (2) nhân với 2 cả 2 vế rồi cộng với (1) vế với vế ta có:

$$(4)(5)(6) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 11y = 6 \\ -3x + 10y = -11 \\ 3x + 8y - z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 33y = 18 \\ -3x + 10y = -11 \\ z = 3x + 8y - 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 43y = 7 \\ x = 6 - 11y \\ z = 3x + 8y - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{7}{43} \\ x = \dfrac{181}{43} \\ z = \dfrac{83}{43} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{181}{43} \\ y = \dfrac{7}{43} \\ z = \dfrac{83}{43} \end{cases}$

**Bài 8.** Ba phân số đều có tử số là 1 và tổng ba phân số đó bằng 1. Hiệu của phân số thứ nhất và phân số thứ hai bằng phân số thứ ba, còn tổng của phân số thứ nhất và phân số thứ hai bằng 5 lần phân số thứ ba. Tìm phân số đó.

### *Giải*

Gọi ba phân số cần tìm là: $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ (x, y, z > 0; x, y, z ∈ Z)

Theo bài ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ (1)

Do hiệu phân số thứ nhất và thứ hai bằng phân số thứ ba nên:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \qquad (2)$$

Tổng phân số thứ nhất và phân số thứ hai bằng 5 lần phân số thứ ba nên

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{z} \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} = 0 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{5}{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x} = 1 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{6}{z} = 0 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{5}{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 6 \end{cases}$$

Vậy ba phân số cần tìm là: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$.

**Bài 9.** Một phân xưởng được giao sản xuất 360 sản phẩm trong một số ngày nhất định. Vì phân xưởng tăng năng suất, mỗi ngày làm thêm được 9 sản phẩm so với định mức, nên trước khi hết hạn một ngày thì phân xưởng đã làm vượt số sản phẩm được giao là 5%. Hỏi nếu vẫn tiếp tục làm việc với năng suất đó thì khi hết hạn phân xưởng đó làm được tất cả bao nhiêu sản phẩm.

### *Giải*

Gọi x là số sản phẩm trong một ngày phân xưởng giao ($x > 0$, $x \in N$, x tính bằng sản phẩm).

y là số ngày phân xưởng được giao ($y > 1$, y tính bằng ngày).

Khi tăng năng suất, mỗi ngày phân xưởng sản xuất được $x + 9$ (sản phẩm)

Theo bài ra:

$$(x + 9)(y - 1) = \frac{360.105}{100} \Leftrightarrow (x + y)(y - 1) = 378 \qquad (1)$$

Mặt khác: $x . y = 360$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ:

$$\begin{cases} xy = 360 \\ (x + 9)(y - 1) = 378 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 360 \\ xy - x + 9y - 9 = 378 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 360 \\ x = 9y - 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9y - 27)y = 360 \\ x = 9y - 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 8 \\ y = -5 \text{ (loại)} \end{array}\right. \\ x = 45 \end{cases}$$

Tóm lại: vẫn tiếp tục làm việc với năng suất mỗi ngày thêm 9 sản phẩm thì hết hạn phân xưởng đó làm được là:

$(45 + 9) . 8 = 432$ (sản phẩm)

**Bài 10.** Giải các phương trình:

**a)** $5x^2 - 3x - 7 = 0$ **b)** $3x^2 + 4x + 1 = 0$

**c)** $0{,}2x^2 + 1{,}2x - 1 = 0$ **d)** $\sqrt{2}x^2 + 5x + \sqrt{8} = 0$

### *Giải*

**a)** Ta có: $\Delta = (-3)^2 - 4 . 5 . (-7) = 149 > 0$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm: $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{149}}{10}$.

**b)** Do $a - b + c = 3 - 4 + 1 = 0$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm: $x = -1$; $x = -\frac{1}{3}$.

**c)** $0{,}2x^2 + 1{,}2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 5 = 0$

Có $\Delta' = 9 + 5 = 14 > 0$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm: $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{14}$.

**d)** $\sqrt{2}x^2 + 5x + \sqrt{8} = 0$

Có $\Delta = 5^2 - 4 . \sqrt{2} . \sqrt{8} = 9$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{-5+3}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad x_2 = \frac{-5-3}{2\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}.$$

**Bài 11.** Giải các phương trình:

**a)** $3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ **b)** $4x^4 + 3x^2 + 5 = 0$

**c)** $x^4 + 6x^2 - 7 = 0$ **d)** $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$

### *Giải*

**a)** Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành:

$$3t^2 - 4t + 1 = 0$$

Có $a + b + c = 0$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

- Với $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
- Với $t = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \pm 1$; $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**b)** Đặt $t = x^2$, điều kiện $x > 0$. Khi đó phương trình trở thành:

$$4t^2 + 3t + 5 = 0$$

Có $\Delta = 3^2 - 4 . 4 . 5 = 9 - 80 = -71 < 0$

$\Rightarrow$ phương trình đã cho vô nghiệm.

**c)** Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành:

$$t^2 + 6t - 7 = 0$$

Do $a + b + c = 1 + 6 - 7 = 0$, suy ra $t = 1$, $t = -7$ (loại)

Với $t = 1$ suy ra $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm 1$.

**d)** Đặt $x^2 = t$, điều kiện $t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành:

$$9t^2 - 12t + 4 = 0 \Leftrightarrow (3t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

Với $t = \frac{2}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.

**Bài 12.** Tìm hai cạnh của một mảnh vườn hình chữ nhật trong hai trường hợp:

**a)** Chu vi là 94,4m và diện tích là $494,55m^2$.

**b)** Hiệu của hai cạnh là 12,1m và diện tích là $1089m^2$.

### *Giải*

Gọi x, y lần lượt là chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật $(0 < x, y < 94,4$; x, y tính bằng m)

Theo bài ra chu vi của hình chữ nhật là 94,4m, suy ra:

$$2(x + y) = 94,4 \Leftrightarrow x + y = 47,2 \quad (1)$$

Diện tích của hình chữ nhật là $494,55m^2$, suy ra: $x \,.\, y = 494,55$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} x + y = 47,2 \\ x \,.\, y = 494,55 \end{cases}$

Suy ra x, y là nghiệm phương trình:

$$X^2 - 47,2X + 494,55 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{63}{2} \\ X_2 = 15,7 \end{cases}$$

Vậy hai cạnh của mảnh vườn hình chữ nhật là: 31,5m và 15,7m.

**Bài 13.** Một tổ trực nhật phân công cho học sinh quét sân. Có hai em cùng quét sân mất 1 giờ 20 phút, trong khi nếu chỉ quét một mình thì em thứ nhất quét hết sân mất nhiều hơn 2 giờ so với em thứ hai. Hỏi mỗi em quét sân một mình thì mất mấy giờ ?

### *Giải*

Ta có 1 giờ 20 phút = $\frac{4}{3}$ giờ.

Gọi x, y là số giờ mà một mình em thứ nhất, em thứ hai quét xong sân $(2 < x, y$; x, y tính bằng giờ).

Trong 1 giờ em thứ nhất quét được $\frac{1}{x}$ sân.

Trong 1 giờ em thứ hai quét được $\frac{1}{y}$ sân.

Do cả hai em quét thì sau 1 giờ 20 phút sẽ xong, suy ra ta có:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).\frac{4}{3} = 1 \quad (1)$$

Mặt khác: $x - 2 = y$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \text{ (loại)} \\ x = 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy nếu làm một mình thì em thứ nhất làm mất 4 giờ, em thứ hai làm mất 2 giờ.

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Chọn câu đúng trong các bài tập sau:

**Bài 14.** Điều kiện của phương trình: $x + 2 - \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{\sqrt{4-3x}}{x+1}$ là:

**a)** $x > -2$ và $x \neq -1$ **b)** $x > -2$ và $x < \dfrac{4}{3}$

**c)** $x > -2$, $x \neq -1$ và $x \leq \dfrac{4}{3}$ **d)** Cả ba câu trên đều sai

**Bài 15.** Tập nghiệm của phương trình $\dfrac{(m^2+2)x + 2m}{x} = 2$ trong trường hợp $m \neq 0$ là:

**a)** $T = \left\{-\dfrac{2}{m}\right\}$ **b)** $T = \varnothing$

**c)** $T = R$ **d)** Cả ba câu trên đều sai

**Bài 16.** Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$ là:

**a)** $\left(\dfrac{39}{26}; \dfrac{3}{13}\right)$ **b)** $\left(\dfrac{17}{13}; \dfrac{5}{13}\right)$ **c)** $\left(\dfrac{39}{26}; \dfrac{1}{2}\right)$ **d)** $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{17}{6}\right)$

**Bài 17.** Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y - z = 7 \\ 4x + 3y + 2z = 15 \\ -x - 2y + 3z = -5 \end{cases}$ là:

**a)** $(10; -7; 9)$ **b)** $\left(\dfrac{3}{2}; 2; \dfrac{3}{2}\right)$ **c)** $\left(-\dfrac{1}{4}; \dfrac{9}{2}; \dfrac{5}{4}\right)$ **d)** $(1; 3; 2)$

# ĐÁP ÁN

| **Bài** | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|
| **Đáp án** | c | a | c | c |

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 18.** Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m.

**a)** $\dfrac{mx - m + 1}{x + 2} = 3$ **b)** $\dfrac{x - m}{x - 1} + \dfrac{x - 1}{x - m} = 2$

**Bài 19.** Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$

**a)** Giải và biện luận hệ phương trình trên theo tham số m.

**b)** Khi hệ có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$, tìm giá trị nguyên của m sao cho $x_0$ và $y_0$ là những số nguyên.

**Bài 20.** Giải các phương trình:

**a)** $\sqrt{2x - 3} = x - 3$ **b)** $\sqrt{5x + 10} = 8 - x$

**c)** $x - \sqrt{2x - 5} = 4$

**Bài 21*.** Giải các phương trình:

**a)** $x^4 + (x - 1)^4 = 97$; **b)** $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$

**c)** $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 18.**

**a)** Với $\begin{cases} m \neq 3 \\ m \neq \dfrac{1}{3} \end{cases}$ thì phương trình có nghiệm $x = \dfrac{m + 5}{m - 3}$

Với $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$ phương trình vô nghiệm.

**b)** Nếu $m \neq 1$, phương trình vô nghiệm.

Nếu $m = 1$, phương trình có nghiệm $x \in R \setminus \{1\}$.

**Bài 19. a)** Với $m \neq \pm 1$ hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{2m + 1}{m + 1} \\ y = \dfrac{m}{m + 1} \end{cases}$

Với $m = 1$ hệ có vô số nghiệm.

Với $m = -1$ hệ vô nghiệm.

**b)** $m = 0$; $m = -2$.

**Bài 20. a)** $x = 6$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = 3$

**Bài 21. a)** $x = 3$; $x = 2$ (Đặt $t = x - \dfrac{1}{2}$)

**b)** $x = -3$; $x = -5$ (Đặt $t = x + 4$)

**c)** $x = 3$; $x = 2$; $x = \dfrac{1}{2}$; $x = \dfrac{1}{3}$ (Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$)

# CHƯƠNG IV

# BẤT ĐẲNG THỨC - BẤT PHƯƠNG TRÌNH

## §1. BẤT ĐẲNG THỨC

### I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**1.** Các mệnh đề dạng "$a < b$" hoặc "$a > b$" được gọi là bất đẳng thức.

- Nếu mệnh đề "$a < b \Rightarrow c < d$" đúng thì ta nói bất đẳng thức $c < d$ là hệ quả của bất đẳng thức $a < b$.
- Nếu bất đẳng thức $a < b$ là hệ quả của bất đẳng thức $c < d$ và ngược lại thì ta nói hai bất đẳng thức tương đương với nhau.

*Chú ý:* Ta còn gặp các bất đẳng thức dạng $a \le b$ hoặc $a \ge b$. Khi đó để phân biệt ta gọi chung là các bất đẳng thức không ngặt, còn các bất đẳng thức dạng $a < b$ hoặc $a > b$ là các bất đẳng thức ngặt.

**2.** Bất đẳng thức Cô–si:

Trung bình nhân của hai số không âm nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của chúng.

$$\sqrt{a.b} \le \frac{a+b}{2} \quad (a, b \ge 0)$$

Đẳng thức $\sqrt{a.b} = \frac{a+b}{2}$ xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

*Hệ quả 1:* $a + \frac{1}{a} \ge 2 \ \forall a > 0$

*Hệ quả 2:* Nếu x, y cùng dương có tổng không đổi thì tích x.y lớn nhất khi $x = y$.

*Hệ quả 3:* Nếu x, y cùng dương và có tích không đổi thì tổng $x + y$ nhỏ nhất khi $x = y$.

**3.** • $|x| \ge 0, \ |x| \ge x, \ |x| \ge -x$

- Với $a > 0$ thì : $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$

$$|x| \ge a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge a \\ x \le -a \end{array}\right.$$

- $|a + b| \le |a| + |b|$

$$|a| - |b| \le |a + b| \le |a| + |b|$$

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng với mọi giá trị của x?

**a)** $8x > 4x$; **b)** $4x > 8x$;

**c)** $8x^2 > 4x^2$; **d)** $8 + x > 4 + x$.

### *Giải*

Ta có: **a)** $8x > 4x \Leftrightarrow x > 0$;

**b)** $4x > 8x \Leftrightarrow x < 0$;

**c)** $8x^2 > 4x^2 \Leftrightarrow x \neq 0$;

**d)** $8 + x > 4 + x \ \forall x$.

Vậy khẳng định d là đúng với mọi giá trị của x.

**Bài 2.** Với cùng một số $x > 5$, biểu thức nào trong các biểu thức sau có giá trị nhỏ nhất?

$A = \frac{5}{x}$; $B = \frac{5}{x} + 1$; $C = \frac{5}{x} - 1$; $D = \frac{x}{5}$.

### *Giải*

Do $x > 5 \Rightarrow \frac{x}{5} > 1$

Mặt khác: $x > 5 \Rightarrow \frac{5}{x} - 1 < \frac{5}{x} < 1 < \frac{5}{x} + 1$

Do vậy với cùng một số $x > 5$ thì biểu thức C có giá trị nhỏ nhất.

**Bài 3.** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

### *Giải*

Do a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác.

$a + b > c > 0 \Rightarrow ac + bc > c^2$ (1)

Hoàn toàn tương tự: $bc + ba > b^2$ (2)

$ab + ac > a^2$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < ac + bc + bc + ba + ab + ac$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + b^2 < 2(ab + bc + ca)$ (đpcm)

**Bài 4.** Chứng minh rằng: $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$, $\forall x, y \geq 0$.

### *Giải*

Ta có: $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$

$\Leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq xy(x + y)$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - xy + y^2 \geq xy$ (do $x, y \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 0$)

$\Leftrightarrow \quad (x - y)^2 \geq 0$ luôn đúng

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

**Bài 5.** Chứng minh rằng: $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0 \ \forall x$.

### *Giải*

Ta có: $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = x^8 - 2.x^4.\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} - x + 1$

$$= (x^4 - \frac{x}{2})^2 + \frac{x^2}{4} + (\frac{x}{2} - 1)^2$$

mà $(x^4 - \frac{x}{2})^2 \geq 0$; $\frac{x^2}{4} \geq 0$; $(\frac{x}{2} - 1)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \quad x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 \geq 0 \qquad (1)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^4 - \frac{x}{2}\right)^2 = 0 \\ \frac{x^4}{4} = 0 \text{ vô lý} \\ \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 = 0 \end{cases} \qquad (2)$

Từ (1) và (2), ta có: $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0 \ \forall x$.

**Bài 6.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, trên các tia Ox và Oy lần lượt lấy các điểm A và B thay đổi sao cho đường thẳng AB luôn tiếp xúc với đường tròn tâm O bán kính 1. Xác định tọa độ của A và B để đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.

### *Giải*

Gọi $A(a; 0)$, $B(0; b)$ $(a, b > 0)$

$\Rightarrow \quad AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\quad OA = |\overrightarrow{OA}| = a$ ; $OB = |\overrightarrow{OB}| = b$

Do AB tiếp xúc với đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$.

Suy ra: diện tích $(\Delta OAB) = \frac{1}{2}AB.h_0 = \frac{1}{2}AB.1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$

Mặt khác: diện tích $(\Delta OAB) = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}ab$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}ab \quad \Leftrightarrow \quad ab = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (1)$

Lại có theo bất đẳng thức cô–si:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{2ab} \geq \sqrt{2}\,.\sqrt{ab}$$

nên từ (1) $\Rightarrow ab \geq \sqrt{2}\,.\sqrt{ab} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{ab}\,(\sqrt{ab} - \sqrt{2}) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab} - \sqrt{2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{ab} \geq \sqrt{2}$$

Do đó AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{ab} = \sqrt{2} \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \quad a = b = \sqrt{2}$

Vậy AB nhỏ nhất khi A($\sqrt{2}$; 0), B(0; $\sqrt{2}$).

### III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 7.** Chứng minh rằng: $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$ với $\forall a, b \in R$.

**Bài 8.** Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ với $\forall a, b, c \in R$.

**Bài 9.** Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, d ta có:

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$$

**Bài 10*.** Cho hàm số $f(x) = (x + 5)(7 - x)$ với $-5 \leq x \leq 7$.

Xác định x sao cho f(x) đạt giá trị lớn nhất.

### IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 7.** Ta có: $a^4 + b^4 - (a^3b + ab^3) = (a - b)^2(a^2 + ab + b^2)$

$$= (a - b)^2\left[\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right] \geq 0 \ \forall a, b$$

**Bài 8.** $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \ \forall a, b, c$

**Bài 9.** Ta có: $(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ab + cd)^2 = (ad - bc)^2 \geq 0 \ \forall a, b, c, d$

**Bài 10.** Do $-5 \leq x \leq 7 \Rightarrow x + 5 \geq 0,\ 7 - x \geq 0$

Áp dụng bất đẳng thức cô–si, ta có:

$$f(x) = (x + 5)(7 - x) \leq \left[\frac{x + 5 + 7 - x}{2}\right]^2 = 6^2 = 36$$

$\Rightarrow$ f(x) đạt giá trị lớn nhất bằng 36 khi $x + 5 = 7 - x \Leftrightarrow x = 1$.

## §2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

### I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**1.** + Bất phương trình một ẩn có một trong các dạng sau:

$f(x) < g(x)$, $(f(x) \leq g(x))$(1)

trong đó x là ẩn số, f(x) và g(x) là những biểu thức của x, f(x) và g(x) được gọi là vế trái và vế phải của bất phương trình (1).

+ Giải bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

+ Khi bất phương trình có tập nghiệm rỗng thì ta nói nó vô nghiệm.

**2.** + Hệ bất phương trình (ẩn x) gồm một số bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng. Mỗi giá trị x đồng thời thỏa mãn tất cả các bất phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

+ Giải hệ bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

+ Để giải một hệ bất phương trình, ta giải từng bất phương trình rồi lấy giao của các tập nghiệm.

**3.** + Hai bất phương trình có cùng tập nghiệm (có thể rỗng) là hai bất phương trình tương đương và dùng ký hiệu $\Leftrightarrow$ để chỉ sự tương đương của hai bất phương trình đó.

+ Nếu hai hệ bất phương trình có cùng một tập nghiệm thì ta nói chúng tương đương với nhau và dùng ký hiệu $\Leftrightarrow$ để chỉ sự tương đương đó.

**4.** Các phép biến đổi tương đương:

+ Cộng (trừ) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình là được một bất phương trình tương đương.

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) + f(x) < Q(x) + f(x)$$

+ Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) \,.\, f(x) > Q(x) \,.\, f(x) \text{ nếu } f(x) < 0$$

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) \,.\, f(x) < Q(x) \,.\, f(x) \text{ nếu } f(x) > 0$$

+ Nếu hai vế của bất phương trình không âm và bình phương hai vế bất phương trình ấy mà không làm thay đổi điều kiện thì ta được một bất phương trình tương đương.

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P^2(x) < Q^2(x) \text{ nếu } P(x), Q(x) \geq 0$$

*Chú ý:*

1) Khi biến đổi các biểu thức ở hai vế của một bất phương trình thì điều kiện của bất phương trình có thể bị thay đổi. Vì vậy, để tìm nghiệm của bất phương trình đã cho ta phải tìm các giá trị của x đồng thời thỏa mãn bất phương trình mới vào điều kiện của bất phương trình đã cho.

2) Khi thực hiện phép nhân (chia) hai vế của bất phương trình $P(x) < Q(x)$ với biểu thức f(x) ta cần lưu ý đến điều kiện về dấu của f(x). Nếu f(x) nhận cả giá trị dương lẫn giá trị âm thì ta

phải lần lượt xét từng trường hợp. Mỗi trường hợp dẫn đến một hệ bất phương trình.

3) Khi giải bất phương trình $P(x) < Q(x)$ mà phải bình phương hai vê thì ta lần lượt xét hai trường hợp:
   a) $P(x)$, $Q(x)$ cùng có giá trị dương, ta bình phương hai vế bất phương trình.
   b) $P(x)$, $Q(x)$ cùng có giá tri âm ta viết $P(x) < Q(x)$ $\Leftrightarrow -Q(x) < -P(x)$ rồi bình phương hai vế.

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Tìm các giá trị x thỏa mãn điều kiện của mỗi bất phương trình sau:

a) $\frac{1}{x} < 1 - \frac{1}{x+1}$ b) $\frac{1}{x^2 - 4} \le \frac{2x}{x^2 - 4x + 3}$

c) $2|x| - 1 + \sqrt[3]{x - 1} < \frac{2x}{x + 1}$ d) $2\sqrt{1 - x} > 3x + \frac{1}{x + 4}$

### *Giải*

a) Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x = 3 \\ x \neq -1 \end{cases}$

c) Điều kiện: $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

d) Điều kiện: $\begin{cases} x + 4 \neq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ x \leq 1 \end{cases}$

**Bài 2.** Chứng minh các bất phương trình sau vô nghiệm:

a) $x^2 + \sqrt{x + 8} \le -3$

b) $\sqrt{1 + 2(x - 3)^2} + \sqrt{5 - 4x + x^2} < \frac{3}{2}$

c) $\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{7 + x^2} > 1$

### *Giải*

a) Ta có: $\sqrt{x + 8} \geq 0 \ \forall x \geq -8$

$x^2 \geq 0 \ \forall x$

$\Rightarrow \quad x^2 + \sqrt{x + 8} \geq 0 \ \forall x \geq -8$

Do vậy: $x^2 + \sqrt{x + 8} \le -3$ là vô lý $\Rightarrow$ Bất phương trình vô nghiệm.

**b)** Ta có: $\sqrt{1+2(x-3)^2} \geq 1\ \forall x.$

$$\sqrt{5-4x+x^2} = \sqrt{1+(x-2)^2} \geq 1\ \forall x$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1+2(x-3)^2} + \sqrt{5-4x+x^2} \geq 1+1 = 2 > \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ Bất phương trình $\sqrt{1+2(x-3)^2} + \sqrt{5-4x+x^2} < \frac{3}{2}$ vô nghiệm.

**c)** Ta có: $1 + x^2 < 7 + x^2 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} < \sqrt{7+x^2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} - \sqrt{7+x^2} < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} - \sqrt{7+x^2} > 1 \text{ vô nghiệm}$$

**Bài 3.** Giải thích vì sao các cặp bất phương trình sau tương đương:

**a)** $-4x + 1 > 0$ và $4x - 1 < 0$

**b)** $2x^2 + 5 \leq 2x - 1$ và $2x^2 - 2x + 6 \leq 0$

**c)** $x + 1 > 0$ và $x + 1 + \frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{x^2+1}$

**d)** $\sqrt{x-1} \geq x$ và $(2x+1)\sqrt{x-1} \geq x(2x+1)$

## *Giải*

**a)** Ta có: $-4x + 1 > 0$ và $4x - 1 < 0$ là tương đương vì: theo phép biến đổi tương đương thì $4x - 1 < 0$ là bất phương trình $-4x + 1 > 0$ mà khi ta nhân có hai vế với $-1$.

**b)** $2x^2 + 5 \leq 2x - 1$ và $2x^2 - 2x + 6 \leq 0$ là tương đương vì khi ta cộng cả hai vế của bất phương trình $2x^2 + 5 \leq 2x - 1$ với biểu thức $1 - 2x$ và không làm thay đổi điều kiện thì ta được bất phương trình $2x^2 - 2x + 6 \leq 0$

**c)** $x + 1 > 0$ và $x + 1 + \frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{x^2+1}$ là tương đương vì khi ta cộng hai vế của bất phương trình $x + 1 > 0$ với biểu thức $\frac{1}{x^2+1}$ và không làm thay đổi điều kiện thì ta được bất phương trình:

$$x + 1 + \frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{x^2+1}$$

**d)** $\sqrt{x-1} \geq x$ và $(2x+1)\sqrt{x-1} \geq x(2x+1)$ là tương đương vì $\sqrt{x-1} \geq x$ có tập xác định $D = [1; +\infty)$

Với $x \geq 1 \Rightarrow 2x + 1 > 0$. Nhân cả hai vế của bất phương trình

$\sqrt{x-1} \geq x$ với biểu thức $2x + 1 > 0$, ta được bất phương trình:

$$(2x+1)\sqrt{x-1} \geq x(2x+1)$$

**Bài 4.** Giải các bất phương trình sau:

**a)** $\dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{x-2}{3} < \dfrac{1-2x}{4}$

**b)** $(2x-1)(x+3) - 3x + 1 \leq (x-1)(x+3) + x^2 - 5$

### *Giải*

**a)** $\dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{x-2}{3} < \dfrac{1-2x}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{18x+6}{12} - \dfrac{4x-8}{12} < \dfrac{3-6x}{12}$

$\Leftrightarrow 18x + 6 - 4x + 8 < 3 - 6x$

$\Leftrightarrow 20x < -11 \Leftrightarrow x < -\dfrac{11}{20}$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x < -\dfrac{11}{20}$

**b)** $(2x-1)(x+3) - 3x + 1 \leq (x-1)(x+3) + x^2 - 5$

$\Leftrightarrow (x+3)(x - 1 - (2x-1)) + x^2 - 5 + 3x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(-x) + x^2 - 5 + 3x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow -6 \geq 0$ (vô lý)

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

**Bài 5.** Giải các hệ bất phương trình:

**a)** $\begin{cases} 6x + \dfrac{5}{7} < 4x - 7 \\ \dfrac{8x+3}{2} < 2x + 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \dfrac{1}{3} \\ 2(x-4) < \dfrac{3x-14}{2} \end{cases}$

### *Giải*

**a)** $\begin{cases} 6x + \dfrac{5}{7} < 4x - 7 \\ \dfrac{8x+3}{2} < 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4x < 7 - \dfrac{5}{7} \\ 8x + 3 < 4x + 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x < \dfrac{44}{7} \\ 4x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{22}{7} \\ x < \dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x < \dfrac{7}{4}$

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm: $x < \dfrac{7}{4}$.

b) $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \dfrac{1}{3} \\ 2(x-4) < \dfrac{3x-4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x > \dfrac{7}{3} \\ 4x - 16 < 3x - 14 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{7}{39} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{7}{39} < x < 2$

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm: $\dfrac{7}{39} < x < 2$.

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 6.** Giải các bất phương trình:

**a)** $4x - 7 > 5x + 4$ **b)** $5x - 3 > \dfrac{2x}{5} + 2$

**c)** $\dfrac{7x}{6} - \dfrac{1}{2} > \dfrac{3x}{2} - 5$ **d)** $\dfrac{5x}{7} - \dfrac{13}{21} + \dfrac{x}{15} < \dfrac{9}{25} - \dfrac{2x}{35}$

**Bài 7.** Giải các hệ bất phương trình:

**a)** $\begin{cases} 6x + \dfrac{5}{7} > 4x + 7 \\ \dfrac{8x+3}{2} < 2x + 25 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \dfrac{1}{3} \\ 2(x-4) < \dfrac{3x-14}{2} \end{cases}$

**Bài 8.** Tìm các nghiệm nguyên của mỗi hệ bất phương trình:

**a)** $\begin{cases} \dfrac{4x-5}{7} < x + 3 \\ \dfrac{3x+8}{4} > 2x - 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 8x - 5 > \dfrac{15x-8}{2} \\ 2(2x-3) > 5x - \dfrac{3}{4} \end{cases}$

**Bài 9*.** Xác định m để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 2x + 1 - m \le 0 \\ mx + 2m - 1 \le 0 \end{cases}$$

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 6. a)** $x < -11$; **b)** $x > \dfrac{25}{23}$; **c)** $x < \dfrac{9}{2}$; **d)** $x < \dfrac{257}{220}$.

**Bài 7. a)** $x < \dfrac{22}{7}$; **b)** $\dfrac{7}{39} < x < 2$.

**Bài 8. a)** $x \in \{-8; -7; ...; 0; 1; 2; ...; 5]$

**b)** $x \in \{-5; -4; ...; 0; 1\}$

**Bài 9*.** $m = \dfrac{-3 - \sqrt{17}}{2}$.

# §3. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**1.** Định lý về dấu nhị thức bậc nhất:

- Nhị thức bậc nhất đối với x là biểu thức dạng $f(x) = ax + b$ trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$.
- Định lý: (về dấu nhị thức bậc nhất)
  Nhị thức $f(x) = ax + b$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $(-\frac{b}{a}; +\infty)$, trái dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $(-\infty; -\frac{b}{a})$.

| x | $-\infty$ |  | $-\frac{b}{a}$ |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = ax + b$ |  | trái dấu với a | 0 | cùng dấu với a |  |

**2.**
- $|f(x)| \leq a \Leftrightarrow -a \leq f(x) \leq a$
- $|f(x)| \geq a \Leftrightarrow f(x) \leq -a$ hoặc $f(x) \geq a$

(với $a \geq 0$)

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Xét dấu các biểu thức sau:

**a)** $f(x) = (2x - 1)(x + 3)$

**b)** $f(x) = (-3x - 3)(x + 2)(x + 3)$

**c)** $f(x) = \frac{-4}{3x + 1} - \frac{3}{2 - x}$

**d)** $f(x) = 4x^2 - 1$

### *Giải*

**a)** Ta có: $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Xét dấu f(x) trên tập xác định D = R, ta có:

|  | $-\infty$ |  | $-3$ |  | $\frac{1}{2}$ |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x - 1$ |  | − | \| | − | 0 | + |  |
| $x + 3$ |  | − | 0 | + | \| | + |  |
| $f(x)$ |  | + | 0 | − | 0 | + |  |

Nhìn vào bảng xét dấu, ta có:

$f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$

$f(x) < 0$ khi $x \in (-3; \frac{1}{2})$.

$f(x) = 0$ khi $x = -3$; $x = \frac{1}{2}$

**b)** Ta có các nhị thức: $-3x - 3$; $x + 2$; $x + 3$ có nghiệm lần lượt là $-1$; $-2$; $-3$. Xét dấu f(x), ta có:

| | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3x - 3$ | | + | | + | | + | 0 | − | |
| $x + 2$ | | − | | − | 0 | + | | + | |
| $x + 3$ | | − | 0 | + | | + | | + | |
| f(x) | | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | |

Nhìn vào bảng xét dấu, ta có:

$f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; -1)$.

$f(x) < 0$ khi $x \in (-3; -2) \cup (-1; +\infty)$.

$f(x) = 0$ khi $x = -3$; $x = -2$; $x = -1$.

**c)** $f(x) = \frac{-4}{3x+1} - \frac{3}{2-x} = \frac{-4(2-x) - 3(3x+1)}{(3x+1)(2-x)} = \frac{-5x-11}{(3x+1)(2-x)}$

Ta có: f(x) không xác định khi $x = \frac{-1}{3}$; $x = 2$.

Các nhị thức $-5x - 11$; $3x + 1$; $2 - x$ có nghiệm lần lượt là:

$\frac{-11}{5}$; $\frac{-1}{3}$; 2.

Xét dấu f(x), ta có:

| x | $-\infty$ | | $-\frac{11}{5}$ | | $-\frac{1}{3}$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-5x - 11$ | | + | 0 | − | | − | | − | |
| $3x + 1$ | | − | | − | 0 | + | | + | |
| $2 - x$ | | + | | + | | + | 0 | − | |
| f(x) | | − | 0 | + | ‖ | − | ‖ | + | |

Nhìn vào bảng xét dấu, ta có:

$f(x) > 0$ khi $x \in (\frac{-11}{5}; \frac{-1}{3}) \cup (2; +\infty)$

$f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; \frac{-11}{5}) \cup (\frac{-1}{3}; 2)$

$f(x) = 0$ khi $x = \frac{-11}{5}$.

$f(x)$ không xác định khi $x = \frac{-1}{3}$; $x = 2$

**d)** $f(x) = 4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$

Các nhị thức: $2x - 1$; $2x + 1$ có các nghiệm lần lượt là $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

Xét dấu f(x), ta có:

| x | $-\infty$ |  | $-\frac{1}{2}$ |  | $\frac{1}{2}$ |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x - 1$ |  | $-$ |  | $-$ | 0 | $+$ |  |
| $2x + 1$ |  | $-$ | 0 | $+$ |  | $+$ |  |
| f(x) |  | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |  |

Nhìn vào bảng, ta có:

$f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$.

$f(x) < 0$ khi $x \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

$f(x) = 0$ khi $x = \pm\frac{1}{2}$.

*Lưu ý:* Ta có thể xét dấu của tích (thương) các nhị thức bằng phương pháp khoảng (được viết ở cuốn "Phân loại Đại số 10").

VD: (câu c)

$$f(x) = \frac{-4}{3x + 1} - \frac{3}{2 - x} = \frac{-5x - 11}{(3x + 1)(2 - x)}$$

Ta có: f(x) không xác định tại $x = -\frac{1}{3}$; $x = 2$.

Các nhị thức: $-5x - 11$, $3x + 1$, $2 - x$ có nghiệm là: $-\frac{11}{5}$; $-\frac{1}{3}$; 2.

Xét dấu f(x), ta có:

Do $f(3) = \frac{-5.3 - 11}{(3.3 + 1)(2 - 3)} > 0$ nên ta có bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ |  | $-\frac{11}{5}$ |  | $-\frac{1}{3}$ |  | $2$ |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) |  | − | 0 | + | ‖ | − | ‖ | + |  |

Suy ra dấu của f(x).

**Bài 2.** Giải các bất phương trình sau:

**a)** $\frac{2}{x-1} \le \frac{5}{2x-1}$ **b)** $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{(x-1)^2}$

**c)** $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+4} < \frac{3}{x+3}$ **d)** $\frac{x^2-3x+1}{x^2-1} < 1$

### *Giải*

**a)** Ta có: $\frac{2}{x-1} \le \frac{5}{2x-1}$

$$\Rightarrow \frac{2}{x-1} - \frac{5}{2x-1} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3-x}{(x-1)(2x-1)} \le 0$$

Đặt $f(x) = \frac{3-x}{(x-1)(2x-1)}$

f(x) không xác định tại $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$.

Các nhị thức: $3 - x$, $x - 1$, $2x - 1$ có các nghiệm lần lượt là: $3; 1; \frac{1}{2}$.

Xét dấu f(x), ta có:

| x | $-\infty$ |  | $\frac{1}{2}$ |  | $1$ |  | $3$ |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 − x |  | + | ⋮ | + | ⋮ | + | 0 | − |  |
| x − 1 |  | − | ⋮ | − | 0 | + | ⋮ | + |  |
| 2x − 1 |  | − | 0 | + | ⋮ | + | ⋮ | + |  |
| f(x) |  | + | ‖ | − | ‖ | + | 0 | − |  |

Nhìn vào bảng xét dấu, ta có:

$$f(x) \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (\frac{1}{2}; 1) \cup [3; +\infty)$$

Vậy bất phương trình có nghiệm: $x \in (\frac{1}{2}; 1) \cup [3; +\infty)$

**b)** $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{(x-1)^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2-(x+1)}{(x+1)(x-1)^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x}{(x+1)(x-1)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-3)}{(x+1)(x-1)^2} \leq 0$$

Đặt $f(x) = \dfrac{x(x-3)}{(x+1)(x-1)^2}$

Xét dấu f(x), ta có: $f(4) = \dfrac{4(4-3)}{(4+1)(4-1)^2} > 0$

| | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | − | ‖ | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |

Nhìn vào bảng xét dấu, ta có: $f(x) \leq 0$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup [0; 1) \cup (1; 3]$

Vậy bất phương trình có nghiệm: $x \in (-\infty; -1) \cup [0; 1) \cup (1; 3]$

**c)** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x+4} < \dfrac{3}{x+3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x+4} - \dfrac{3}{x+3} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+4)(x+3)+2x(x+3)-3(x+4).x}{x(x+4)(x+3)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+12}{x(x+4)(x+3)} < 0$$

Đặtf(x) = $\dfrac{x+12}{x(x+4)(x+3)}$

Xét dấu f(x), ta có: $f(1) = \dfrac{1+12}{1.(1+4)(1+3)} > 0$

| | $-\infty$ | | $-12$ | | $-4$ | | $-3$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | + | 0 | − | ‖ | + | ‖ | − | ‖ | + | |

$\Rightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-12; -4) \cup (-3; 0).$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in (-12; -4) \cup (-3; 0)$.

**d)** $\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-1} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x+1}{x^2-1} - 1 < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2-3x}{(x-1)(x+1)} < 0$$

Đặt $f(x) = \dfrac{2-3x}{(x-1)(x+1)}$

Xét dấu f(x), ta có: $f(0) = \dfrac{2-3.0}{(0-1)(0+1)} < 0$

| | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{2}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | + | ‖ | − | 0 | + | ‖ | − | |

Vậy bất phương trình có nghiệm: $x \in (-1; \frac{2}{3}) \cup (1; +\infty)$.

**Bài 3.** Giải các bất phương trình:

**a)** $|5x - 4| \geq 6$ **b)** $|x| + |3 - x| > 4 + |x + 2|$

**c)** $\left|\frac{-5}{x + 1}\right| < \left|\frac{10}{x - 1}\right|$

## *Giải*

**a)** $|5x - 4| \geq 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - 4 \geq 6 \\ 5x - 4 \leq -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq -\frac{2}{5} \end{array}\right.$

Vậy bất phương trình có nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq -\frac{2}{3} \end{array}\right.$

**b)** $|x| + |3 - x| > 4 + |x + 2|$ (1)

$\Leftrightarrow |x| + |3 - x| - 4 - |x + 2| > 0$

Đặt $f(x) = |x| + |3 - x| - 4 - |x + 2|$

Khử trị tuyệt đối của f(x), ta được:

| x | $-\infty$ $\quad$ $-2$ | $-2$ $\quad$ $0$ | $0$ $\quad$ $3$ | $3$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\|x\|$ | $-x$ | $-x$ | $x$ | $x$ |
| $\|3 - x\|$ | $3 - x$ | $3 - x$ | $3 - x$ | $x - 3$ |
| $\|x + 2\|$ | $-x - 2$ | $x + 2$ | $x + 2$ | $x + 2$ |
| f(x) | $-x + 1$ | $-3x - 3$ | $-x - 3$ | $x - 9$ |

Do đó:

* *Trường hợp 1:* Với $-\infty < x < -2$ thì

(1) $\Leftrightarrow$ $-x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < 1$

Suy ra: $-\infty < x < -2$ là nghiệm.

* *Trường hợp 2:* Với $-2 \leq x \leq 0$ thì

(1) $\Leftrightarrow$ $-3x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -1$

Suy ra: $-2 \leq x < -1$ là nghiệm.

* *Trường hợp 3:* Với $0 < x < 3$ thì

(1) $\Leftrightarrow \quad -x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -3$

Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

* *Trường hợp 4:* Với $x \geq 3$ thì

(1) $\Leftrightarrow \quad x - 9 > 0 \Leftrightarrow x > 9$

Suy ra: $x > 9$ là nghiệm.

Tóm lại: Bất phương trình có nghiệm $x \in (-\infty; -1) \cup (9; +\infty)$.

**c)** $\left|\dfrac{-5}{x+1}\right| < \left|\dfrac{10}{x-1}\right|$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-5}{x+1}\right)^2 < \left(\frac{10}{x-1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{-5}{x+1} - \frac{10}{x-1}\right]\left[\frac{-5}{x+1} + \frac{10}{x-1}\right] < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-15x-5}{x^2-1} \cdot \frac{5x+15}{x^2-1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-15x-5)(5x+15)}{(x^2-1)^2} < 0$$

Đặt $f(x) = \dfrac{(-15x-5)(5x+15)}{(x^2-1)^2}$, xét dấu f(x) ta được:

|  | $-\infty$ |  | $-3$ |  | $-1$ |  | $-\frac{1}{3}$ |  | $1$ |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) |  | $-$ | 0 | $+$ | ‖ | $+$ | 0 | $-$ | ‖ | $-$ |  |

(do $f(0) = \dfrac{-5.15}{(-1)^2} < 0$)

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in (-\infty; -3) \cup (-\frac{1}{3}; 1) \cup (1; +\infty)$.

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 4.** Giải các bất phương trình:

**a)** $\dfrac{x(x+2)}{x^2-1} > 0$ **b)** $\dfrac{(4x^2-1)(x+2)^2}{x^3(x+1)(x-2)^5} > 0$

**c)** $\dfrac{-3x+1}{2x+1} < -2$ **d)** $\dfrac{-4}{3x+1} > \dfrac{3}{2-x}$

**Bài 5*.** Giải các bất phương trình:

**a)** $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x+3} - \dfrac{3}{x+2} < 0$ **b)** $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)} > \dfrac{1}{(x+3)^2}$

**Bài 6*.** Giải các bất phương trình:

**a)** $\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 2 - x$ **b)** $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{2x - 5} \geq \sqrt{5 - 2x}$

**c)** $x^2 - |5x + 6| > 0$ **d)** $|x - 1| + |x + 1| < 4$

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 4.**

**a)** $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

**b)** $x \in (-1; -\frac{1}{2}) \cup (0; \frac{1}{2}) \cup (2; +\infty)$.

**c)** $x \in (-3; -\frac{1}{2})$. **d)** $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{-11}{3}; -\frac{1}{3})$.

**Bài 5.**

**a)** $x \in (-11; -3) \cup (-2; 1)$. **b)** $x \in (-3; -2) \cup (-2; \frac{-11}{7}) \cup (1; +\infty)$.

**Bài 6.**

**a)** $x \geq 3$. **b)** $x = \frac{5}{2}$.

**c)** $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; -1) \cup (6; +\infty)$. **d)** $-2 < x < 2$.

# §4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

## I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**1.** Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là

$$ax + by \leq c \qquad (1)$$

$(ax + by < c; ax + by \geq c; ax + by > c)$

trong đó a, b, c là những số thực đã cho, $a^2 + b^2 \neq 0$, x và y là các ẩn số cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 \leq c$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình (1).

**2.** Tập hợp các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình (1) được gọi là miền nghiệm của nó.

**3.** Cách biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$.

Bước 1: Vẽ đường thẳng $ax + by = c (\Delta)$

Bước 2: Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0) \notin \Delta$.

Bước 3: Tính $ax_0 + by_0$ và so sanh $ax_0 + by_0$ với c.

Bước 4: Kết luận.

Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ chứa $M_0$ là miền nghiệm của $ax + by \leq c$.

Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ không chứa $M_0$ là miền nghiệm của $ax + by \leq c$.

*Lưu ý:* Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$.

4. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng. Mỗi nghiệm chung đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình hai ẩn sau:

**a)** $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$; **b)** $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$.

### *Giải*

**a)** Ta có: $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$ (1)

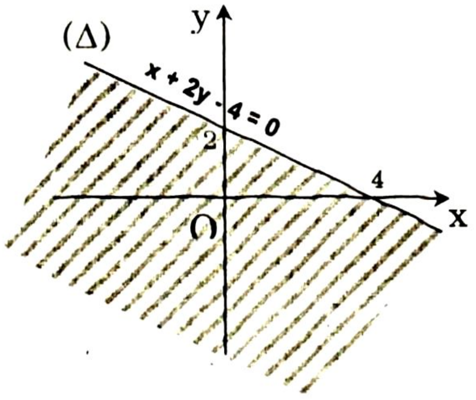
$\Leftrightarrow \quad x + 2y - 4 < 0$

Gọi Δ là đường thẳng có phương trình: $x + 2y - 4 = 0$

Xét M(0; 0), ta có:

$0 + 2 . 0 - 4 = -4 < 0$

Vậy miền nghiệm của bất phương trình (1) là nửa mặt phẳng bờ Δ chứa gốc tọa độ O (trừ đường thẳng Δ) (màu gạch chéo).



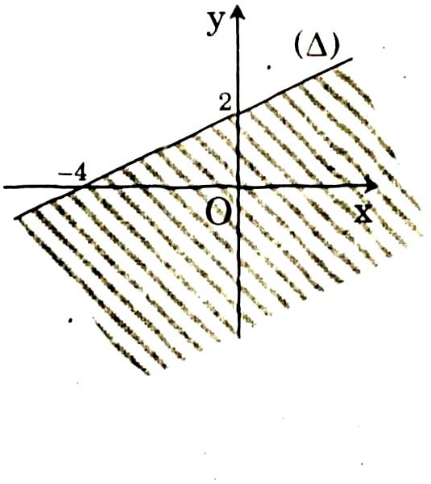
**b)** $3x - 3 + 4(y - 2) < 5x - 3$

$\Leftrightarrow \quad -2x + 4y - 8 < 0$

Gọi Δ: $-2x + 4y - 8 = 0$. Vẽ đường thẳng Δ.

Lấy O(0; 0), ta có: $-2 . 0 + 4 . 0 - 8 < 0$

Do vậy nửa mặt phẳng bờ Δ chứa gốc tọa độ O (trừ đường thẳng Δ) là miền nghiệm của bất phương trình.



**Bài 2.** Biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau:

**a)** $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 \end{cases}$  **b)** $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} - 1 < 0 \\ x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3y}{2} \le 2 \\ x \ge 0 \end{cases}$

### *Giải*

**a)** Ta có: $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 \end{cases}$

Gọi $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ lần lượt là ba đường thẳng có phương trình là:

$x - 2y = 0$; $x + 3y + 2 = 0$;

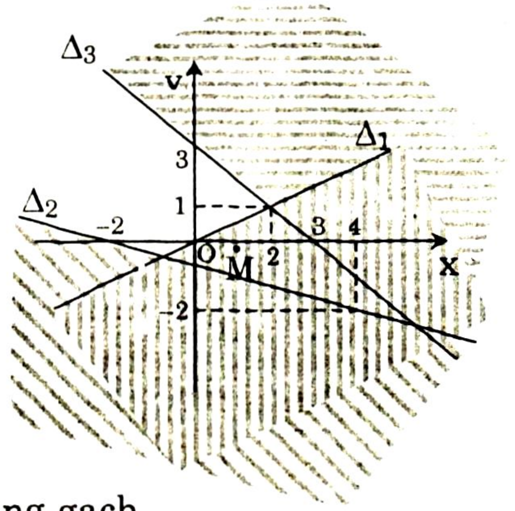
$x - y + 3 = 0$

Lấy điểm M(1; 0), ta có:

$1 - 2 \,.\, 0 = 1 > 0$;

$1 + 3 \,.\, 0 + 2 = 3 > 0$;

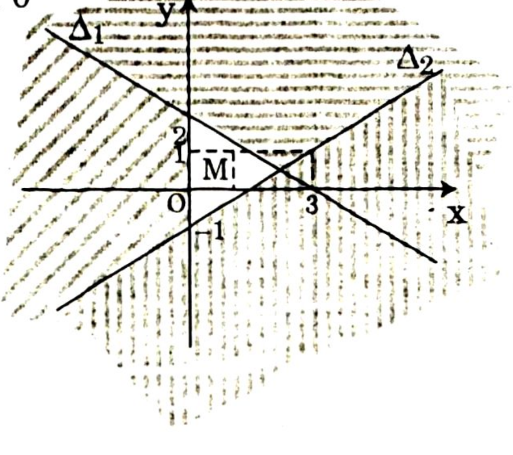
$1 - 0 + 3 = 4 > 0$



Vẽ $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ trên hệ trục, ta có:

Vậy tập nghiệm của hệ là miền không gạch.

**b)** $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} - 1 < 0 \\ x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3y}{2} \le 2 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 6 < 0 \\ 2x - 3y - 3 \le 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$



Gọi $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ lần lượt là ba đường thẳng có phương trình lần lượt là $2x + 3y - 6 = 0$;

$2x - 3y - 3 = 0$; $x = 0$.

Lấy điểm M(1; 1), ta có:

$2 \,.\, 1 + 3 \,.\, 1 - 6 = -1 < 0$;

$2 . 1 - 3 . 1 - 3 = -4 < 0; \qquad 1 > 0$

Vẽ $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ trên hệ trục ta có:

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của hệ là miền trong của tam giác $M_1M_2M_3$ và hai đoạn thẳng $M_1M_2$, $M_2M_3$. Với $M_1$ là giao của $\Delta_1$ và $\Delta_3$, $M_2$ là giao $\Delta_2$, $\Delta_3$, $M_3$ là giao của $\Delta_1$ và $\Delta_2$.

**Bài 3.** Ở một xí nghiệp có ba nhóm máy A, B, C dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau:

| Nhóm | Số máy trong mỗi nhóm | Số máy trong từng nhau để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm | |
|---|---|---|---|
| | | Loại I | Loại II |
| A | 10 | 2 | 2 |
| B | 4 | 0 | 2 |
| C | 12 | 2 | 4 |

Một đơn vị sản phẩm loại I lãi 3 nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm loại II lãi 5 nghìn đồng. Hãy lập kế hoạch sản xuất để cho tổng số tiền lãi cao nhất.

### *Giải*

Gọi x là số đơn vị sản phẩm loại I (x > 0), y là số đơn vị sản phẩm loại II (y > 0). Như vậy tiền lãi mỗi ngày là L = 3.x + 5y (nghìn đồng).

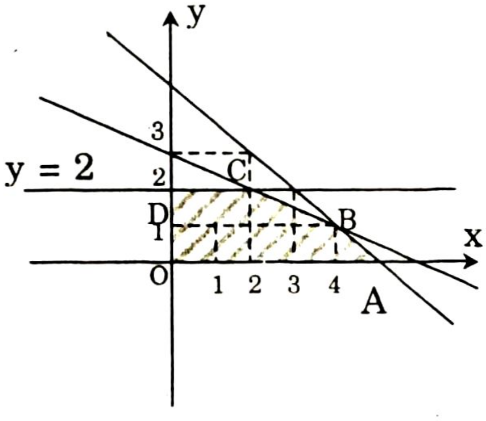
Theo bảng, ta có: Nhóm A cần 2x + 2y máy.

Nhóm B cần 0x + 2y máy.

Nhóm C cần 2x + 4y máy.

Theo bài ra, ta có hệ: $\begin{cases} 2x + 2y \le 10 \\ \quad\;\; 2y \le 4 \\ 2x + 4y \le 12 \end{cases}$ (1) $(x \ge 0;\ y \ge 0)$

Bài toán trở thành: trong các nghiệm của hệ bất phương trình (1) thì nghiệm ($x = x_0$; $y = y_0$) sao cho L = 3x + 5y lớn nhất.



Miền nghiệm của hệ (1) là ngũ giác OABCD kể cả miền trong (gọi là miền ngũ giác OABCD).

Do vậy để có tổng tiền cao nhất thì $x = 4$, $y = 1$ và $L = 3.4 + 5.1 = 17$ (nghìn đồng).

Vậy để có tiền lãi cao nhất, mỗi ngày sản xuất 4 đơn vị sản phẩm loại I và 1 đơn vị sản phẩm loại II.

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 4.** Biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ miền nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x \geq y - 3 \\ 2y \geq 8 - 2 \\ y \leq 6 \end{cases}$

**Bài 5*.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x; y) = x + 2y$ với điều kiện:

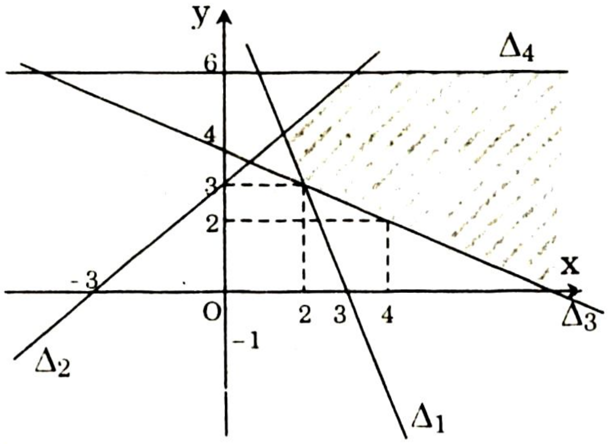
$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x + 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$$

**Bài 6*.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = x - 2y$ với điều kiện:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ x + y - 2 \geq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$$

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 4.**



Vẽ các đường thẳng $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$, $\Delta_4$ lần lượt có phương trình:

$3x + y - 9 = 0$, $x - y + 3 = 0$, $x + 2y - 8 = 0$, $y - 6 = 0$ trên cùng một hệ trục.

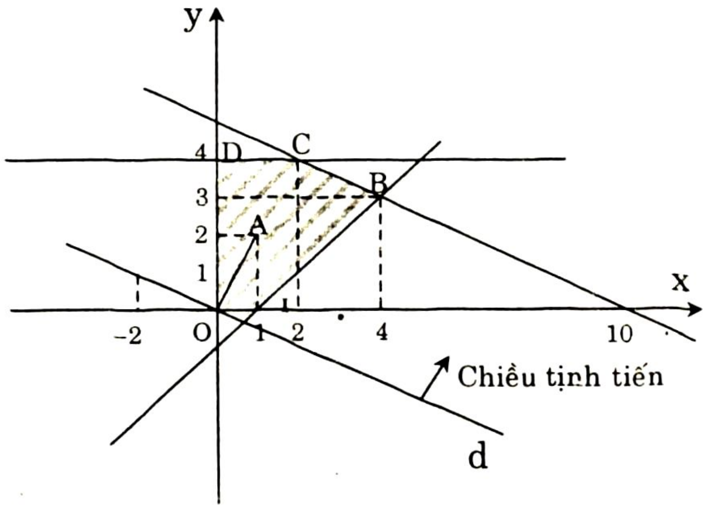
Xét $O(0; 0) \Rightarrow$ miền nghiệm của hệ (I) là phần mặt phẳng gạch chéo.

**Bài 4.** Dựng đường thẳng d: $x + 2y + m = 0$

Tịnh tiến d theo chiều véctơ $\overrightarrow{OA} = (1; 2)$ sao cho d luôn song song với chính nó, thì $x + 2y$ sẽ lớn nhất khi d qua B và C.

Vậy $\max F(x; y) = \max(x + 2y) = F(B) = F(C)$, biết $B(4; 3)$, $C(2; 4)$.

Ta có: $\max F(x; y) = 4 + 6 = 2 + 8 = 10$.

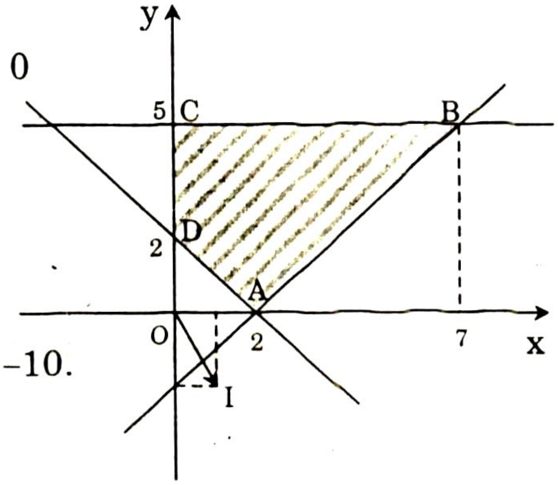


**Bài 6.**

Dựng đường thẳng (d): $x - 2y + m = 0$

Tịnh tiến (d) theo chiều dương véctơ $\overrightarrow{OI}(1; -2)$ sao cho d luôn song song với chính nó, thì $x - 2y$ sẽ nhỏ nhất khi d đi qua $C(0; 5)$.

Vậy $\min(x - 2y) = F(C) = 0 - 2.5 = -10$.



# §5. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. * Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức dạng $f(x) = ax^2 + bx - c$ trong đó a, b, c là những số đã cho, $a \neq 0$.

   * Định lý (về dấu tam thức bậc hai).

   Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$

   Nếu $\Delta < 0$ thì f(x) cùng dấu với hệ số a, với mọi $x \in R$.

   Nếu $\Delta = 0$ thì f(x) luôn cùng dấu với hệ số a, trừ khi $x = -\frac{b}{2a}$

Nếu $\Delta > 0$ thì f(x) cùng dấu với hệ số a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$, trái dấu với hệ số a khi $x_1 < x < x_2$ trong đó $x_1$, $x_2$ $(x_1 < x_2)$ là hai nghiệm f(x).

**2.** Bất phương trình bậc hai một ẩn là bất phương trình dạng:

$$ax^2 + bx + c < 0$$

(hoặc $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$),
trong đó a, b, c là những số thực đã cho, $a \neq 0$, x là ẩn.
Giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$ thực chất là tìm các khoảng nghiệm mà trong đó $f(x) = ax^2 + bx + c$ cùng dấu với hệ số a (trường hợp $a < 0$) hay trái dấu với a (trường hợp $a > 0$).

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Xét dấu các tam thức bậc hai:

**a)** $5x^2 - 3x + 1$ **b)** $-2x^2 + 3x + 5$

**c)** $x^2 + 12x + 36$ **d)** $(2x - 3)(x + 5)$

### *Giải*

**a)** Xét $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$ có

$$\Delta = 3^2 - 4 \,.\, 5 \,.\, 1 = -11 < 0 \text{ mà } a = 5 > 0$$

Suy ra: $f(x) > 0\ \forall x \in R$.

**b)** Xét $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ có:

$\Delta = 3^2 - 4(-2) \,.\, 5 = 49 > 0$, suy ra f(x) có nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{2}$

mà $a = -2 < 0$, do vậy: $f(x) < 0$ với $\left[\begin{array}{l} x > \frac{5}{2} \\ x < -1 \end{array}\right.$

$f(x) > 0$ với $-1 < x < \frac{5}{2}$

$f(x) = 0$ với $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{array}\right.$

**c)** Xét $f(x) = x^2 + 12x + 36$ có: $\Delta' = 6^2 - 36 = 0$

Suy ra: $f(x) > 0$ với mọi $x \in R \setminus \{-6\}$

$f(x) = 0$ với $x = -6$

**d)** Xét $f(x) = (2x - 3)(x + 5)$ có 2 nghiệm $x = -5$, $x = \frac{3}{2}$, mà $a = 2 > 0$

Do vậy: f(x) > 0 với ∀x: $\left[\begin{array}{l} x > \dfrac{3}{2} \\ x < -5 \end{array}\right.$

f(x) < 0 với ∀x: $-5 < x < \dfrac{3}{2}$

f(x) = 0 với $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ x = -5 \end{array}\right.$

**Bài 2.** Lập bảng xét dấu các biểu thức sau:

**a)** $f(x) = (3x^3 - 10x + 3)(4x - 5)$

**b)** $f(x) = (3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1)$

**c)** $f(x) = (4x^2 - 1)(-8x^2 + x - 3)(2x + 9)$

**d)** $f(x) = \dfrac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3}$

## *Giải*

**a)** Xét tan thức $3x^2 - 10x + 3$ và nhị thức $4x - 5$, rồi lập bảng xét dấu f(x), ta được:

| x | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $\frac{5}{4}$ | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2 - 10x + 3$ | | + | 0 | − | ¦ | − | 0 | + | |
| $4x - 5$ | | − | ¦ | − | 0 | + | ¦ | + | |
| f(x) | | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |

**b)** Xét tam thức: $3x^2 - 4x$ và $2x^2 - x - 1$, rồi lập bảng xét dấu f(x) là được:

| x | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | 0 | | 1 | | $\frac{4}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2 - 4x$ | | + | ¦ | + | 0 | − | ¦ | − | 0 | + | |
| $2x^2 - x - 1$ | | + | 0 | − | ¦ | − | 0 | + | ¦ | + | |
| f(x) | | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |

**c)** Xét các tam thức $4x^2 - 1$, $-8x^2 + x - 3$ và nhị thức $2x + 9$. Lập bảng xét dấu f(x), ta được:

| x | $-\infty$ | | $-\frac{9}{2}$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x^2 - 1$ | | + | ⋮ | + | 0 | − | 0 | + | |
| $-8x^2 + x - 3$ | | − | ⋮ | − | ⋮ | − | ⋮ | − | |
| $2x + 9$ | | − | 0 | + | ⋮ | + | ⋮ | + | |
| f(x) | | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | |

**d)** Xét các tam thức: $3x^2 - x$, $3 - x^2$, $4x^2 + x - 3$. Lập bảng xét dấu f(x), ta được:

| x | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $0$ | | $\frac{3}{4}$ | | $\sqrt{3}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2 - x$ | | + | ⋮ | + | ⋮ | + | 0 | − | ⋮ | − | ⋮ | − | 0 | + | |
| $3 - x^2$ | | − | 0 | + | ⋮ | + | ⋮ | + | ⋮ | + | 0 | − | ⋮ | − | |
| $4x^2 + x - 3$ | | + | | + | 0 | − | ⋮ | − | 0 | + | ⋮ | + | ⋮ | + | |
| f(x) | | − | 0 | + | ‖ | − | 0 | + | ‖ | − | 0 | + | 0 | − | |

**Bài 3.** Giải các bất phương trình sau:

**a)** $4x^2 - x + 1 < 0$

**b)** $-3x^2 + x + 4 \geq 0$

**c)** $\dfrac{1}{x^2 - 4} < \dfrac{3}{3x^2 + x - 4}$

**d)** $x^2 - x - 6 \leq 0$

## *Giải*

**a)** Xét tam thức $f(x) = 4x^2 - x + 1$ có: $\Delta = 1^2 - 16 = -15 < 0$

mà $a = 4 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ với mọi x.

Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

**b)** Xét $f(x) = -3x^2 + x + 4$ có: $a = b + c = -3 - 1 + 4 = 0$

$\Rightarrow f(x)$ có 2 nghiệm: $x = -1$, $x = \dfrac{4}{3}$

mà $a = -3 < 0$, do đó: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \dfrac{4}{3}$

Vậy bất phương trình có nghiệm $-1 \leq x \leq \dfrac{4}{3}$.

**c)** $\dfrac{1}{x^2 - 4} < \dfrac{3}{3x^2 + x - 4}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3x^2 + x - 4 - 3(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)(3x^2 + x - 4)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x + 8}{(x^2 - 4)(3x^2 + x - 4)} < 0$$

Lập bảng xét dấu: $f(x) = \dfrac{x + 8}{(x^2 - 4)(3x^2 + x - 4)}$, ta có:

| $x$ | $-\infty$ | | $-8$ | | $-2$ | | $-\frac{4}{3}$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x + 8$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ¦ | $+$ | ¦ | $+$ | ¦ | $+$ | ¦ | $+$ | |
| $x^2 - 4$ | | $+$ | ¦ | $+$ | $0$ | $-$ | ¦ | $-$ | ¦ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $3x^2 + x - 4$ | | $+$ | ¦ | $+$ | ¦ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | ¦ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | |

Nhìn vào bảng xét dấu ta có bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in (-\infty; -8) \cup (-2; -\frac{4}{3}) \cup (1; 2)$.

**d)** Xét $f(x) = x^2 - x - 6$ có hai nghiệm $x = 3$, $x = -2$, mà hệ số $a = 1$.

Suy ra: $f(x) \le 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 3$

Vậy bất phương trình có nghiệm $-2 \le x \le 3$.

**Bài 4.** Tìm các giá trị của tham số m để các phương trình sau vô nghiệm:

**a)** $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 = 0$

**b)** $(3 - m)x^2 - 2(m + 3)x + m + 2 = 0$

### *Giải*

**a)** Đặt $f(x) = (m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6$

- Nếu $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ trở thành $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ là nghiệm.

  Suy ra $m = 2$ không là giá trị cần tìm.

- Nếu $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$. Ta có:

$$\begin{aligned}\Delta' &= (2m - 3)^2 - (m - 2)(5m - 6)\\ &= 4m^2 - 12m + 9 - 5m^2 + 6m + 10m - 12\\ &= -m^2 + 4m - 3\end{aligned}$$

Phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0$

$$\Leftrightarrow \quad -m^2 + 4m - 3 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < 1 \end{array}\right.$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < 1 \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

**b)** Đặt $f(x) = (3 - m)x^2 - 2(m + 3)x + m + 2$

- Nếu $3 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$, khi đó phương trình trở thành

$-6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$ là nghiệm.

Suy ra: m = 3 không là giá trị cần tìm.

- Nếu $3 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$. Ta có:

$$\Delta' = (m + 3)^2 - (3 - m)(m + 2)$$
$$= m^2 + 6m + 9 - 3m - 6 + m^2 + 2m = 2m^2 + 5m + 3$$

Phương trình f(x) = 0 vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0$.

$$\Leftrightarrow \quad 2m^2 + 5m + 3 < 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < m < -1$$

Vậy $-\frac{3}{2} < m < -1$ là giá trị cần tìm.

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 5.** Giải các bất phương trình sau:

**a)** $2x^2 - 5x + 2 < 0$ **b)** $-5x^2 + 4x + 12 < 0$

**c)** $16x^2 + 40x + 25 > 0$ **d)** $-2x^2 + 3x - 7 > 0$

**Bài 6.** Tìm những giá trị của m để các phương trình sau có nghiệm:

**a)** $(m - 5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$

**b)** $(2m + 1)x^2 + 3(m + 1)x + m + 1 = 0$

**Bài 7.** Xác định m để các tam thức sau dương với mọi x.

**a)** $3x^2 + 2(m - 1)x + m + 4$

**b)** $x^2 + (m + 1)x + 2m + 7$

**c)** $2x^2 + (m - 2)x - m + 4$

**Bài 8*. a)** Cho $f(x) = mx^2 - 2(m + 1)x - m + 5$. Xác định m để $f(x) > 0$ với mọi $x < 1$.

**b)** Cho $f(x) = 2x^2 - (3m + 1)x - (3m + 9)$. Xác định m để $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in [-2; 1]$.

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 5.** Đáp số:

**a)** $\frac{1}{2} < x < 2$ **b)** $\left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -\frac{6}{5} \end{array}\right.$ **c)** $x \neq -\frac{5}{4}$ **d)** Vô nghiệm.

**Bài 6.**

**a)** $m \in (-\infty; -\frac{10}{3}] \cup [1; +\infty)$ **b)** $\left[\begin{array}{l} m \geq -1 \\ m \leq -5 \end{array}\right.$

**Bài 7.**

**a)** $\frac{5 - \sqrt{69}}{2} < m < \frac{5 + \sqrt{69}}{2}$ **b)** $-3 < m < 9$

**c)** $-2 - \sqrt{32} < m < -2 + \sqrt{32}$

**Bài 8*.**

**a)** $m \in [0; \frac{3}{2})$ là giá trị cần tìm.

**b)** $-\frac{4}{3} \le m \le -\frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

# ÔN TẬP CHƯƠNG IV

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**1.** Bất đẳng thức là mệnh đề dạng "$a < b$" hoặc "$a > b$".

+ Nếu mệnh đề "$a < b \Rightarrow c < d$" đúng thì ta nói bất đẳng thức $c < d$ là hệ quả của bất đẳng thức $a < b$.

+ Nếu bất đẳng thức $a < b$ là hệ quả của bất đẳng thức $c < d$ và ngược lại thì ta nói hai bất đẳng thức tương đương với nhau.

+ Bất đẳng thức Côsi: với $a, b \ge 0$, thì $\frac{a + b}{2} \ge \sqrt{a.b}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Mở rộng: Cho $a_1, a_2, .., a_n \ge 0$, thì: $\frac{a_1 + a_2 + .. + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$

**2.** Bất phương trình một ẩn, nghiệm của bất phương trình, cách giải bất phương trình:

+ Hệ bất phương trình – cách giải

+ Hai bất phương trình tương đương. Các phép biến đổi tương đương.

**3.** Dấu của nhị thức bật nhất:

*Định lý:* Nhị thức $f(x) = ax + b$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$, trái dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

**4.** + Bất phương trình bậc nhất hai ẩn, nghiệm và cách giải.

+ Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, cách biểu diễn nghiệm.

**5.** Dấu của tam thức bậc hai:

+ Định lý:

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ( $a \neq 0$), $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu $\Delta < 0$ thì $a.f(x) > 0\ \forall x \in R$

Nếu $\Delta = 0$ thì $a.f(x) > 0\ \forall x \neq -\frac{b}{2a}$; $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.

Nếu $\Delta > 0$ thì $a.f(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > x_1 \\ x < x_2 \end{array}\right. (x_1 > x_2)$

$$a.f(x) < 0 \Leftrightarrow x_2 < x < x_1$$

+ Cách giải bất phương trình bậc hai.

## II.BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Sử dụng dấu bất đẳng thức để viết các mệnh đề sau:

**a)** x là số dương;

**b)** y là số không âm;

**c)** Với mọi số thực $\alpha$, $|\alpha|$ là số không âm;

**d)** Trung bình cộng của hai số dương a và b không nhỏ hơn trung bình nhân của chúng.

### *Giải*

**a)** $x > 0$

**b)** $y \geq 0$

**c)** $\forall \alpha \in R,\ |\alpha| \geq 0$

**d)** $a, b > 0;\ \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

**Bài 2.** Có thể rút ra kết luận gì về dấu của hai số a và b nếu biết:

**a)** $a.b > 0$; **b)** $\frac{a}{b} > 0$; **c)** $a.b < 0$; **d)** $\frac{a}{b} < 0$.

### *Giải*

**a)** $a.b > 0 \Leftrightarrow$ a, b cùng dấu

**b)** $\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow$ a, b cùng dấu

**c)** $a.b < 0 \Leftrightarrow$ a, b trái dấu

**d)** $\frac{a}{b} < 0 \Leftrightarrow$ a, b trái dấu

**Bài 3.** Khi cân một vật với độ chính xác đến 0,05 kg, người ta cho biết kết quả là P = 26,4 kg. Hãy chỉ ra khối lượng thực của vật đó nằm trong khoảng nào?

### *Giải*

Gọi x là khối lượng thực của vật đó. Do khi cân một vật với độ chính xác đến 0,05. Nên:

$$P - 0{,}05 \,.\, P \le x \le P + 0{,}05 \,.\, P$$

Mà $P = 26{,}4$ kg

$$\Rightarrow 25{,}08 \le x \le 27{,}72$$

Vậy khối lượng thực của vật nằm trong đoạn từ 25,08 kg đến 27,72 kg.

**Bài 4.** Trên cùng một mặt phẳng toạ độ, hãy vẽ đồ thị hai hàm số $y = f(x) = x + 1$ và $y = g(x) = 3 - x$ và chỉ ra các giá trị nào của x thoả mãn:

**a)** $f(x) = g(x)$; **b)** $f(x) > g(x)$; **c)** $f(x) < g(x)$.

### *Giải*

- Xét $y = x + 1$ có hệ số $a = 1 > 0$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên R

Với $x = -1 \Rightarrow y = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 1$

- Xét $y = 3 - x$ có hệ số $a = -1 < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên R

Với $x = 3 \Rightarrow y = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 3$

$\Rightarrow$ Ta có đồ thị hai hàm trên một hệ trục

Trên hệ trục tọa độ Oxy ta có:

**a)** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$

**b)** $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x > 1$

**c)** $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x < 1$

Thật vậy: $f(x) = g(x)$

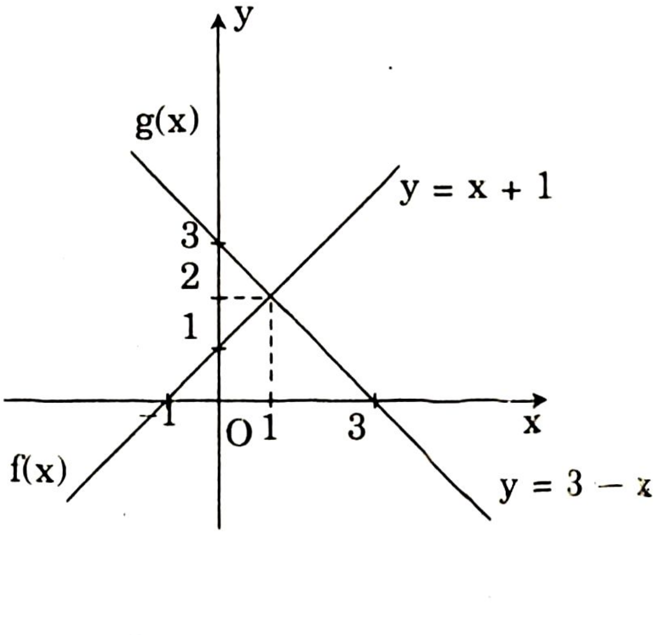
$\Leftrightarrow x + 1 = 3 - x \Leftrightarrow x = 1$

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x + 1 > 3 - x$

$\Leftrightarrow x > 1$

$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x + 1 < 3 - x$

$\Leftrightarrow x < 1$



**Bài 5.** Phát biểu và chứng minh bất đẳng thức Côsi cho hai số dương.

### *Giải*

- Bất đẳng thức Côsi cho hai số dương:

Trung bình nhân của hai số dương nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của chúng.

Thật vậy: Giả sử a, b > 0, ta chứng minh: $\sqrt{a.b} < \frac{a+b}{2}$

Ta có: $\sqrt{a.b} - \frac{a+b}{2} = -\frac{1}{2}\left[a - 2\sqrt{a.b} + b\right]$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \leq 0,\ \ \forall a, b > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{a.b} - \frac{a+b}{2} \leq 0 \text{ hay } \sqrt{a.b} \leq \frac{a+b}{2}$$

**Bài 6.** Điều kiện của một bất phương trình là gì? Định nghĩa hai bất phương trình tương đương. Thế nào là phép biến đổi tương đương các bất phương trình?

### *Giải*

- Điều kiện của một bất phương trình là điều kiện của biến số để biểu thức của biến ở hai vế bất phương trình có nghĩa.
- Hai bất phương trình có cùng một tập nghiệm (có thể là tập rỗng) được gọi là hai bất phương trình tương đương.
- Các phép biến đổi tương đương các bất phương trình.

**1)** Cộng (trừ): Cộng (trừ) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

**2)** Nhân (chia): Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình ta được một bất phương trình mới tương đương.

**3)** Bình phương: Nếu hai vế của bất phương trình không âm và bình phương hai vế bất phương trình ấy mà không làm thay đổi điều kiện thì ta được một bất phương trình tương đương.

**Bài 7.** Nêu quy tắc giải bất phương trình ax + by ≤ c.

### *Giải*

Để giải bất phương trình ax + by ≤ c ta thực hiện các bước sau:

*Bước 1:* Vẽ đường thẳng ax + by = c (Δ)

*Bước 2:* Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0) \notin (\Delta)$

*Bước 3:* Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh $ax_0 + by_0$ với c.

+ Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ chứa $M_0$ là miền

+ Nếu $ax_0 + by > c$ thì nửa mặt phẳng bờ $\Delta$ không chứa $M_0$ là miền nghiệm của $ax + by \le c$.

**Bài 8.** Phát biểu định lý về dấu tam thức bậc hai.

### *Giải*

Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \ne 0)$. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$

+ Nếu $\Delta < 0$ thì f(x) cùng dấu với a với mọi x

+ Nếu $\Delta = 0$ thì f(x) luôn cùng dấu với a với mọi $x \in R \backslash \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ và

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0.$$

+ Nếu $\Delta > 0$ thì f(x) cùng dấu với a với $x > x_1$ hoặc $x < x_2$ và f(x) trái dấu với a với $x_2 < x < x_1$ (trong đó $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của tam thức và $x_1 > x_2$).

**Bài 9.** Cho $a > 0$, $b > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

### *Giải*

Ta có: $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\Leftrightarrow a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \ge a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$

$\Leftrightarrow a\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) + b\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)(a - b) \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \ge 0\ (*)$

Do $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \ge 0$, $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \ge 0$ với $\forall a \ge 0;\ b \ge 0$.

$\Rightarrow$ (*) luôn đúng $\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

**Bài 10.**

**a)** Bằng cách sử dụng hằng đẳng thức $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ hãy xét dấu:

$$f(x) = x^4 - x^2 + 6x - 9 \text{ và } g(x) = x^2 - 2x - \frac{4}{x^2 - 2x}$$

**b)** Hãy tìm nghiệm nguyên của bất phương trình sau:

$$x(x^3 - x + 6) > 9$$

### *Giải*

**a)** Ta có: $f(x) = x^4 - x^2 + 6x - 9$

$= x^4 - (x-3)^2 = (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 3)$

Xét dấu của tam thức: $x^2 + x - 3$, $x^2 - x + 3$ và $f(x)$ ta được:

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ | | $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 + x - 3$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $x^2 - x + 3$ | | + | $\vert$ | + | $\vert$ | + | |
| $f(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

Suy ra: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

Ta có: $g(x) = x^2 - 2x - \frac{4}{x^2 - 2x} = \frac{\left(x^2 - 2x\right)^2 - 4}{x^2 - 2x}$

$= \frac{\left(x^2 - 2x - 2\right)\left(x^2 - 2x + 2\right)}{x^2 - 2x}$

Xét dấu của tam thức $x^2 - 2x - 2$; $x^2 - 2x + 2$; $x^2 - 2x$ và $g(x)$ ta được:

| $x$ | $-\infty$ | | $1-\sqrt{3}$ | | $0$ | | $2$ | | $1+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 2x - 2$ | | + | 0 | − | | − | | − | 0 | + | |
| $x^2 - 2x + 2$ | | + | | + | | + | | + | | + | |
| $x^2 - 2x$ | | + | | + | 0 | − | 0 | + | | + | |
| $g(x)$ | | + | 0 | − | ‖ | + | ‖ | − | 0 | + | |

Suy ra: $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; 1-\sqrt{3}\right) \cup (0; 2) \cup \left(1+\sqrt{3}; +\infty\right)$

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(1-\sqrt{3}; 0\right) \cup \left(2; 1+\sqrt{3}\right)$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$

$g(x)$ không xác định khi $x = 0$; $x = 2$

**b)** Ta có $x(x^3 - x + 6) > 9(1)$

**b)** Ta có $x(x^3 - x + 6) > 9 (1)$

$\Leftrightarrow \quad x^4 - x^2 + 6x - 9 > 0$

$\Leftrightarrow \quad (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 3) > 0$

Đặt $f(x) = (x^2 + x - 3)(x^2 + x + 3)$

Theo câu a) ta có:

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$$

mà $x \in Z$, suy ra bất phương trình 1 có nghiệm:

$x \in Z \setminus \{-2; -1; 0\}$

**Bài 11.** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Sử dụng định lý về dấu tam thức bậc hai, chứng minh rằng:

$$b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 > 0 \ \forall x$$

## *Giải*

Xét tam thức: $f(x) = b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$ có

$\Delta = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)$

$= ((b - c)^2 - a^2)((b + c)^2 - a^2)$

$= (b - (c + a))(b - c + a)(b + c + a)(b + c - a)$

Do a, b, c là 3 cạnh của tam giác $\Rightarrow b < c + a, c < b + a, a < b + c$.

$\Rightarrow b - (c + a) < 0; b - c + a > 0; b + c - a > 0; b + c + a > 0$

$\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow f(x)$ cùng dấu với $b^2 \ \forall x$ hay $f(x) > 0 \ \forall x$(đpcm).

**Bài 12.** Giải hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 3x - y \geq 9 \\ x > y - 3 \\ 2y \geq 8 - x \\ y \leq 6 \end{cases} \quad (I)$$

## *Giải*

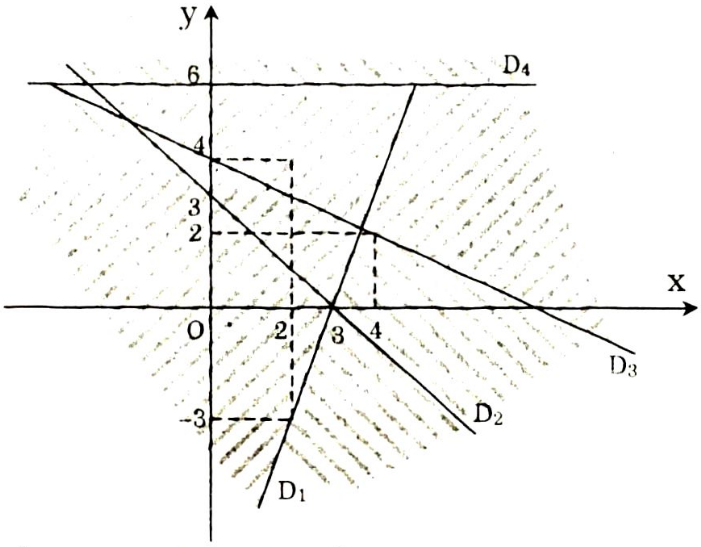
$$(I) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 9 \geq 0 & (1) \\ x - y + 3 \geq 0 & (2) \\ x + 2y - 8 \geq 0 & (3) \\ y - 6 \leq 0 & (4) \end{cases}$$

Trước hết ta tìm miền gần những điểm M(x; y) có tọa độ thỏa mãn các điều kiện (1), (2), (3), (4).

(1) $\Leftrightarrow$ M nằm ở nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng: $3x - y - 9 = 0$ và không chứa O.

(2) $\Leftrightarrow$ M nằm ở nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng: $x - y + 3 = 0$ và chứa O.

(4) ⇔ M nằm ở nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng: $y - 6 = 0$ và chứa O.



Do vậy hệ bất phương trình vô nghiệm.

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Bài 13.** Trong các suy luận sau, suy luận nào đúng ?

(A) $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow xy < 1$ (B) $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{y} < 1$

(C) $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow xy < 1$ (D) $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow x - y < 1$

**Bài 14.** Số −2 thuộc tập nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau ?

(A) $2x + 1 > 1 - x$ (B) $(2x + 1)(1 - x) < x^2$

(C) $\dfrac{1}{1 - x} + 2 \leq 0$ (D) $(2 - x)(x + 2)^2 < 0$

**Bài 15.** Bất phương trình $(x + 1)\sqrt{x} \leq 0$ tương đương với bất phương trình nào trong các bất phương trình sau?

(A) $\sqrt{x\sqrt{(x + 1)^2}} \leq 0$ (B) $(x + 1)\sqrt{x} < 0$

(C) $\sqrt{x}\,(x + 1)^2 \leq 0$ (D) $(x + 1)^2\sqrt{x} < 0$

**Bài 16.** Khẳng định nào trong các khẳng định sau đây là đúng? Bất phương trình: $mx^2 + (2m - 1)x + m + 1 < 0$ có nghiệm khi:

(A) $m = 1$ (B) $m = 3$

(C) $m = 0$ (D) $m = -2$

**Bài 17.** Hãy chỉ ra hệ bất phương trình nào vô nghiệm trong các hệ bất phương trình sau?

bất phương trình sau?

(A) $\begin{cases} x^2 - 2x \le 0 \\ 2x + 1 < 3x + 2 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{x+2} \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x^2 - 5x + 2 < 0 \\ x^2 + 8x + 1 \ge 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} |x - 1| \le 2 \\ |2x - 1| \le 1 \end{cases}$

## Đáp án:

| **Bài** | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Đáp án** | (C) | (B) | (A), (C) | (C), (D) | (B) |

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 18.** Giải các bất phương trình sau:

**a)** $\dfrac{2x^2 + x}{1 - 2x} \ge 1 - x$ **b)** $\dfrac{x - 5}{2x + 4} < \dfrac{2x + 4}{x - 5}$

**c)** $4|x - 1| < x + 1$ **d)** $|x - 3| \le 2x - 3$

**Bài 19*.** Tìm giá trị nhỏ nhất $F = y - x$, biết x, y thỏa mãn hệ bất phương trình: $\begin{cases} -2x + y \le -2 \\ x - 2y \le 2 \\ x + y \le 5 \\ x \ge 0 \end{cases}$

**Bài 20.** Giải các bất phương trình sau:

**a)** $\dfrac{9 - x^2}{-x(x + 2)} \le 0$ **b)** $\dfrac{3x + 4}{x^2 - 3x + 5} < 0$

**c)** $x^3 - 13x^2 + 42x - 36 > 0$ **d)** $1 + \dfrac{6}{x^2 + 3x + 2} > \dfrac{6}{x + 2}$

**Bài 21*.** Tìm m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm:

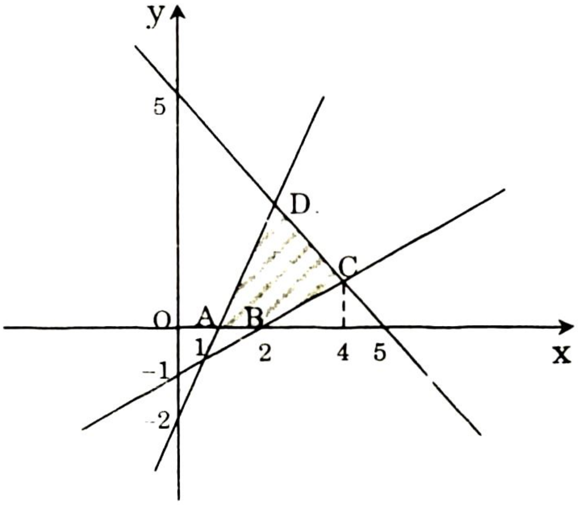
$$\begin{cases} x^2 + 7x - 8 < 0 \\ m^2.x + 1 > 3 + (3m - 2)x \end{cases}$$

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 18.** Đáp số:

**a)** $\dfrac{1}{4} < x < \dfrac{1}{2}$. **b)** $x \in (-\infty; -9) \cup (-2; \dfrac{1}{3}) \cup (5; +\infty)$.

**Bài 19.** $L = y - x$ nhỏ nhất ($x$, $y$ thỏa mãn hệ) khi $x = 4$, $y = 1$ và $L = 1 - 4 = -3$.



**Bài 20.**

a) $x \in [-3; -2) \cup (0; 3]$.

b) $x < -\frac{4}{3}$.

c) $x \in (5 - \sqrt{13}; 3) \cup (5 + \sqrt{13}; +\infty)$.

d) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$.

**Bài 21.** $0 \leq m \leq 3$ là giá trị cần tìm.

# Chương V

# THỐNG KÊ

## §1. BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT

### I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1.Các khái niệm cơ bản

* Số liệu thống kê:

Mỗi số liệu thống kê là một giá trị tự điều tra được của dấu hiệu cần nghiên cứu (các giá trị này không nhất thiết phải khác nhau).

* Tần số: Tần số của giá trị $x_i$, là số lần lặp lại của giá trị $x_i$ trong cuộc điều tra. Tần số của giá trị được kí hiệu là $n_i$.

* Tần suất: Tần suất của giá trị $x_i$ là tỉ số giữa tần số của $x_i$ với tổng số n các phần tử điều tra. Tần số của giá trị $x_i$ ký hiệu là $f_i$.

Như vậy: $f_i = \dfrac{x_i}{n}$

### 2. Bảng phân bố tần số và tần suất

* Từ bảng số liệu ban đầu ta lọc ra các giá trị của biến lượng và tần số tương ứng của mỗi giá trị ấy, rồi sắp xếp thành một bảng phân phối tần số – tần suất và được trình bày như sau:

| Giá trị của $x_i$ | Tần số $n_i$ | Tần số $f_i$ (%) |
|---|---|---|
| $x_1$ | $n_1$ | $f_1$ |
| $x_2$ | $n_2$ | $f_2$ |
| $x_3$ | $n_3$ | $f_3$ |
| ... | ... | ... |
| $x_m$ | $n_m$ | $f_m$ |
|  | Tổng n | Tổng 100% |

### 3. Bảng phân bố tần số và tần suất ghép hợp:

– Nếu mẫu điều tra có kích thước lớn (nhiều phần tử) hoặc các biến lượng lấy giá trị quá gần nhau, thì người ta thường nhóm các giá trị đó thành từng lớp và lập bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp, khi đó bảng này được gọi là bảng phân bố tầm số – tần suất ghép lớp.

Mỗi lớp [a, b] có bề rộng b – a, a là cận dưới, b là cận trên (a < b). Giá trị trung tâm của một lớp bằng trung bình cộng của hai cận của lớp đó. Giá trị trung tâm của một lớp dùng để đại diện cho lớp đó.

Thông thường một bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp được trình bày như sau:

| **Giá trị của $x_i$ (được chia lớp)** | **Giá trị trung tâm (của lớp)** | **Tần số** | **Tần suất** |
|---|---|---|---|
| $[x_0; x_1)$ | $c_1$ | $n_1$ | $f_1$ |
| $[x_1; x_2)$ | $c_2$ | $n_2$ | $f_2$ |
| $[x_2; x_3)$ | $c_3$ | $n_3$ | $f_3$ |
| ... | ... | ... | ... |
| $[x_{m-1}; x_m]$ | $c_m$ | $n_m$ | $f_m$ |
| Cộng | | Tổng n | Tổng 100% |

## II. BÀI TẬP CƠ BẢN

**Bài 1.** Cho bảng số liệu thống kê.

Tuổi thọ của 30 bóng đèn điện được thắp thử (đơn vị: giờ)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1180 | 1150 | 1190 | 1170 | 1180 | 1170 |
| 1160 | 1170 | 1160 | 1150 | 1190 | 1180 |
| 1170 | 1170 | 1170 | 1190 | 1170 | 1170 |
| 1170 | 1180 | 1170 | 1160 | 1160 | 1160 |
| 1170 | 1160 | 1180 | 1180 | 1150 | 1170 |

**a)** Hãy lập: Bảng phân bố tần số, tần suất rời rạc.

**b)** Dựa vào kết quả câu a) hãy đưa ra nhận xét về tình hình phân bố của các số liệu thống kê (Giá trị nào chiếm tỉ lệ cao, thấp, ...)

### *Giải*

**a)** Bảng phân bố tần số, tần suất rời rạc

| **Tuổi thọ bóng đèn (Đơn vị: giờ)** | **Tần số $n_i$** | **Tần suất $f_i$ (%)** |
|---|---|---|
| 1150 | 3 | 10 |
| 1160 | 6 | 20 |
| 1170 | 12 | 40 |
| 1180 | 6 | 20 |
| 1190 | 3 | 10 |
| Cộng | 30 | 100(%) |

**b)** Từ bảng ở phần a) ta có nhận xét sau:

Trong 30 số liệu thống kê trên ta thấy có 5 giá trị khác nhau: $x_1 = 1150$, $x_2 = 1160$, $x_3 = 1170$, $x_4 = 1180$, $x_5 = 1190$.

Giá trị $x_1$; $x_5$ xuất hiện 3 lần chiếm tỉ lệ 10% (tỉ lệ thấp nhất).

Giá trị $x_2$; $x_4$ xuất hiện 6 lần chiếm tỉ lệ 20%.

Giá trị $x_3$ xuất hiện 12 lần chiếm tỉ lệ 40% (tỉ lệ cao nhất).

**Bài 2.** Cho bảng phân bố tần số ghép lớp:

Chiều dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành

| **Các lớp của chiều dài X(cm)** | **Giá trị trung tâm $c_i$** | **Tần số $n_i$** |
|---|---|---|
| [10; 20) | 15 | 8 |
| [20; 30) | 25 | 18 |
| [30; 40) | 35 | 24 |
| [40; 50] | 45 | 10 |
| Cộng | | 60 |

**a)** Hãy lập bảng phân bố tần suất ghép lớp

**b)** Dựa vào kết quả câu a), hãy nêu rõ trong 60 lá dương xỉ được khảo sát: số lá có chiều dài dưới 30cm chiếm bao nhiêu phần trăm? Số lá có chiều dài từ 30cm đến 50cm chiếm bao nhiêu phần trăm?

### *Giải*

**a)** Bảng phân bố tần suất ghép lớp

| **Các lớp của chiều dài X(cm)** | **Giá trị trung tâm $c_i$** | **Tần suất $f_i$(%)** |
|---|---|---|
| [10; 20) | 15 | 13,3 |
| [20; 30) | 25 | 30 |
| [30; 40) | 35 | 40 |
| [40; 50) | 45 | 16,7 |
| Cộng | | 100% |

**b)** Trong 60 lá dương xỉ được khảo sát:

- Số lá có chiều dài dưới 30cm chiếm xấp xỉ 43,3%
- Số lá có chiều dài từ 30cm đến 50cm chiếm xấp xỉ 56,7%

**Bài 3.** Cho bảng số liệu thống kê:

Khối lượng của 30 củ khoai tây được trồng ở nông trường T (đơn vị gam)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 90 | 73 | 88 | 99 | 100 | 102 | 111 | 96 | 79 | 93 |
| 81 | 94 | 96 | 93 | 95 | 82 | 90 | 106 | 103 | 116 |
| 109 | 108 | 112 | 87 | 74 | 91 | 84 | 97 | 85 | 92 |

**a)** Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp, với các lớp sau:

[70; 80); [70; 90); [90; 100); [110; 120]

**b)** Dựa vào kết quả câu a). Hãy nêu nhận xét về tình hình phân bố của các số liệu thống kê đã cho (Lớp nào chiếm tỉ lệ cao nhất, thấp nhất,...)

### *Giải*

| **Các lớp khối lượng khoai tây X(gam)** | **Giá trị trung tâm $c_i$** | **Tần số $n_i$** | **Tần suất $f_i$(%)** |
|---|---|---|---|
| [70; 80) | 75 | 3 | 10 |
| [80; 90) | 85 | 6 | 20 |
| [90; 100) | 95 | 12 | 40 |
| [100; 110) | 105 | 6 | 20 |
| [110; 120] | 115 | 3 | 10 |
| Cộng | | 30 | 100% |

**b)** * Lớp 1 : [70; 80) và lớp 5: [110; 120] chiếm tỉ lệ thấp nhất (tỉ lệ 10%)

* Lớp 3 : [90; 100) chiếm tỉ lệ cao nhất (40%)

* Lớp 2 và lớp 4 có tỉ lệ bằng nhau (20%)

**Bài 4.** Cho bảng số liệu thống kê:

Chiều cao của 35 cây bạch đàn (đơn vị: m)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6,6 | 7,5 | 8,2 | 8,2 | 7,8 | 7,9 | 9,0 | 8,9 | 8,2 |
| 7,2 | 7,5 | 8,3 | 7,4 | 8,7 | 7,7 | 7,0 | 9,4 | 8,7 |
| 8,0 | 7,7 | 7,8 | 8,3 | 8,6 | 8,1 | 8,1 | 9,5 | 6,9 |
| 8,0 | 7,6 | 7,9 | 7,3 | 8,5 | 8,4 | 8,0 | 8,8 | |

**a)** Hãy lập bảng phân bố tần suất ghép lớp, với các lớp sau:
[6,5; 7,0); [7,0; 7,5); [7,5; 8,0); [8,0; 8,5); [8,5; 9,0); [9,0; 9,5]

**b)** Dựa vào bảng kết quả câu a), hãy nêu rõ: Trong 35 cây bạch đàn được khảo sát, những cây có chiều cao từ 8m trở lên chiếm bao nhiêu phần trăm?

### *Giải*

**a)** Bảng phân bố tần suất ghép lớp (với các lớp đã cho)

| **Các lớp chiều cao của cây bạch đàn X(m)** | **Giá trị trung tâm $c_i$** | **Tần suất $f_i$ (%)** |
|---|---|---|
| [6,5; 7,0) | 6,75 | 5,7 |
| [7,0; 7,5) | 7,25 | 11,4 |
| [7,5; 8,0) | 7,75 | 25,7 |
| [8,0; 8,5) | 8,25 | 31,4 |
| [8,5; 9,0) | 8,75 | 17,2 |
| [9,0; 9,5] | 9,25 | 8,6 |
| Cộng | | 100% |

**b)** Dựa vào bảng trên ta thấy những cây bạch đàn được khảo sát, có chiều cao 8m trở lên chiếm xấp xỉ: 57,2%

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 5.** Cho bảng thống kê:

Tuổi của 32 sinh viên ở một trường A (đơn vị tuổi)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 22 | 18 | 19 | 19 | 22 | 19 | 19 |
| 18 | 20 | 20 | 19 | 20 | 22 | 21 | 18 |
| 18 | 19 | 19 | 19 | 19 | 18 | 21 | 18 |
| 21 | 19 | 21 | 18 | 18 | 19 | 20 | 22 |

**a)** Hãy lập bảng tần số và tần suất rời rạc.

**b)** Dựa vào câu a) hãy đưa ra nhận xét, tình hình phân bố của các số liệu thống kê (Giá trị nào chiếm tỉ lệ cao nhất, thấp nhất...)

**Bài 6.** Cho bảng số liệu thống kê:

Thu nhập của 30 cửa hàng ở một quận (đơn vị: triệu đồng/tháng)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 57 | 46 | 24 | 58 | 37 | 66 |
| 44 | 43 | 46 | 65 | 44 | 43 |
| 65 | 67 | 27 | 64 | 25 | 32 |
| 40 | 70 | 37 | 36 | 52 | 20 |
| 21 | 70 | 36 | 47 | 33 | 25 |

**a)** Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp, với các lớp sau: [20; 30); [30; 40); [40; 50); [50; 60); [60; 70]

**b)** Dựa vào kết quả câu a) . Hãy nêu lớp nào chiếm tỉ lệ cao nhất, thấp nhất?

**Bài 7.** Cho bảng số liệu thống kê

Thời gian (phút) hoàn thành một bài tập toán của mỗi học sinh lớp $10A_3$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20,8 | 20,7 | 23,1 | 20,7 | 20,9 | 20,9 | 23,9 | 21,6 |
| 25,3 | 21,5 | 23,8 | 20,7 | 23,3 | 19,8 | 20,9 | 20,1 |
| 21,3 | 24,2 | 22,0 | 23,8 | 24,1 | 21,1 | 22,8 | 19,5 |
| 19,7 | 21,9 | 21,2 | 24,2 | 24,3 | 22,2 | 23,5 | 23,9 |
| 22,8 | 22,5 | 19,9 | 23,8 | 25,0 | 22,9 | 22,8 | 22,7 |

**a)** Hãy lập bảng phân phối tần số và tần suất ghép lớp, với các lớp sau: [19,5; 20,5); [20,5; 21,5); [21,5; 22,5); [22,5; 23,5); [23,5; 24,5); [24,5; 25,5] .

**b)** Dựa vào kết quả câu a). Hãy nêu tỉ lệ phần trăm số học sinh hoàn thành bài tập toán trước 22,5 (phút).

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 5. a)** Bảng phân bố tần số và tần suất rời rạc.

| Tuổi của Sinh viên $x_i$ (tuổi) | Tần số $n_i$ | Tần suất $f_i$(%) |
|---|---|---|
| 18 | 8 | 25 |
| 19 | 12 | 37,5 |
| 20 | 4 | 12,5 |
| 21 | 4 | 12,5 |
| 22 | 4 | 12,5 |
| Cộng | 32 | 100% |

**b)** Trong 32 số liệu thống kê có 5 giá trị khác nhau:

$x_1 = 18$, $x_2 = 19$, $x_3 = 20$, $x_4 = 21$, $x_5 = 22$

Giá trị $x_3$, $x_4$, $x_5$: xuất hiện 4 lần và chiếm tỉ lệ thấp nhất: 12,5%

Giá trị $x_2$ chiếm tỉ lệ cao nhất: 37,5%

**Bài 6. a)** Bảng phân phối tần số và tần suất ghép lớp (với các lớp đã cho).

| Các lớp thu nhập của cửa hàng X (triệu) | Giá trị trung tâm $c_i$ | Tần số $n_i$ | Tần suất $f_i$ (%) |
|---|---|---|---|
| [20; 30) | 25 | 6 | 20 |
| [30; 40) | 35 | 6 | 20 |
| [40; 50) | 45 | 8 | 26,7 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| [50; 60)<br>[60; 70] | 55<br>65 | 3<br>7 | 10<br>23,3 |
| Cộng | | 30 | 100% |

**b)** Từ câu a) ta thấy các số liệu thống kê được chia thành 5 lớp trong đó

Lớp 1: [20; 30) và lớp 2[30; 40) có tỉ lệ bằng nhau.

Lớp 3: [40; 50) chiếm tỉ lệ cao nhất 26,7%.

Lớp 4: [50; 60) chiếm tỉ lệ thấp nhất 10%.

**Bài 7. a)** Bảng phân phối tần số và tần suất ghép lớp (với các lớp đã cho)

| **Các lớp thời gian X (phút)** | **Giá trị trung tâm $c_i$** | **Tần số $n_i$** | **Tần suất $f_i$ (%)** |
|---|---|---|---|
| [19,5; 20,5)<br>[20,5; 21,5)<br>[21,5; 22,5)<br>[22,5; 23,5)<br>[23,5; 24,5)<br>[24,5; 25,5] | 20<br>21<br>22<br>23<br>24<br>25 | 5<br>10<br>5<br>8<br>10<br>2 | 12,5<br>25,0<br>12,5<br>20,0<br>25,0<br>5,0 |
| Cộng | | 40 | 100% |

**b)** Tỉ lệ phần trăm học sinh hoàn thành bài tập toán trước 22,5 (phút) là: 12,5% + 25,5% + 12,5% = 50,5%.

# §2. BIỂU ĐỒ TẦN SUẤT

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Để có hình ảnh trực quan về phân bố của các số liệu thống kê, ta có thể mô tả các bảng phân bố bằng biểu đồ hoặc đường gấp khúc.

### 1. Biểu đồ hình cột tần suất

Cách vẽ biểu đồ hình cột:

Vẽ hai đường thẳng vuông góc. Trên đường thẳng nằm ngang (dùng làm trục số) ta đánh dấu các khoảng xác định nhóm.

Tại mỗi khoảng ta dựng lên một hình cột chữ nhật, với đáy là khoảng đó, còn chiều cao bằng tần suất của nhóm mà khoảng đó xác định.

**2. Đường gấp khúc tần suất**

Ta vẽ hai đường thẳng vuông góc (như vẽ biểu đồ hình cột). Trên mặt phẳng toạ độ, xác định các điểm $(c_i, f_i)$, $i = \overline{1, n}$ sau đó vẽ các đoạn thẳng nối các điểm $(c_i, f_i)$ với điểm $(c_{i+1}; f_{i+1})$, $i = \overline{1, n}$ ta thu được một đường gấp khúc. Đường gấp khúc này được gọi là đường gấp khúc tần suất.

**3. Biểu đồ hình quạt**

Cách vẽ: Vẽ hình tròn, chia hình tròn thành những hình quạt. Mỗi lớp được tương ứng với một hình quạt mà diện tích của nó tỉ lệ với tần suất của nhóm đó.

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1. a)** Hãy mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã được lập ở bài tập số 2 §1 bằng cách vẽ:

Biểu đồ tần suất hình cột.

Đường gấp khúc tần suất.

**b)** Dựa vào biểu đồ tần suất hình cột, hãy nêu nhận xét về tình hình phân bố của các số liệu thống kê (Lớp nào chiếm tỉ lệ cao nhất, thấp nhất,...)

### *Giải*

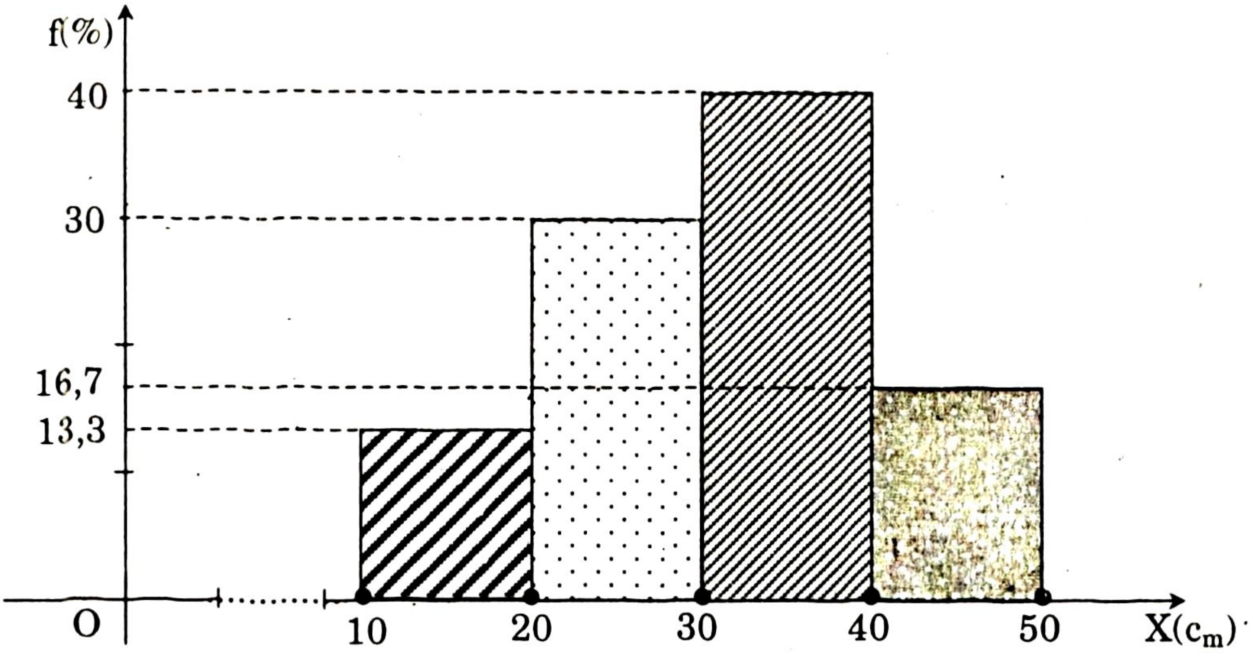
Ta có: Lớp 1: [10; 20) có tần suất 13,3%

Lớp 2: [20; 30) có tần suất 30%

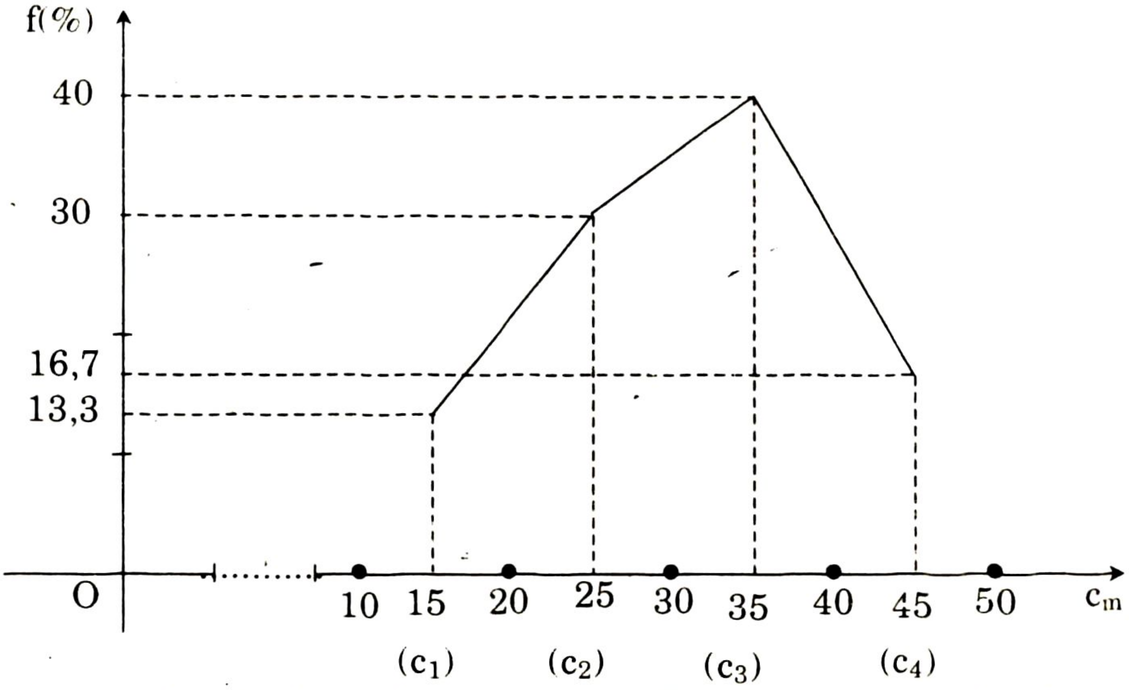
Lớp 3: [30; 40) có tần suất 40%

Lớp 4: [40; 50] có tần suất 16,7%

**a)** Biểu đồ tần suất hình cột (Bài tập 2 §1)



* Đường gấp khúc tần suất:



**b)** Từ biểu đồ tần suất hình cột ta dễ thấy Lớp 1 chiếm tỉ lệ thấp nhất: 13,3%. Lớp 3 chiếm tỉ lệ cao nhất 40%

**Bài 2.** Xét bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp đã được lập ở bài tập số 3 của § 1.

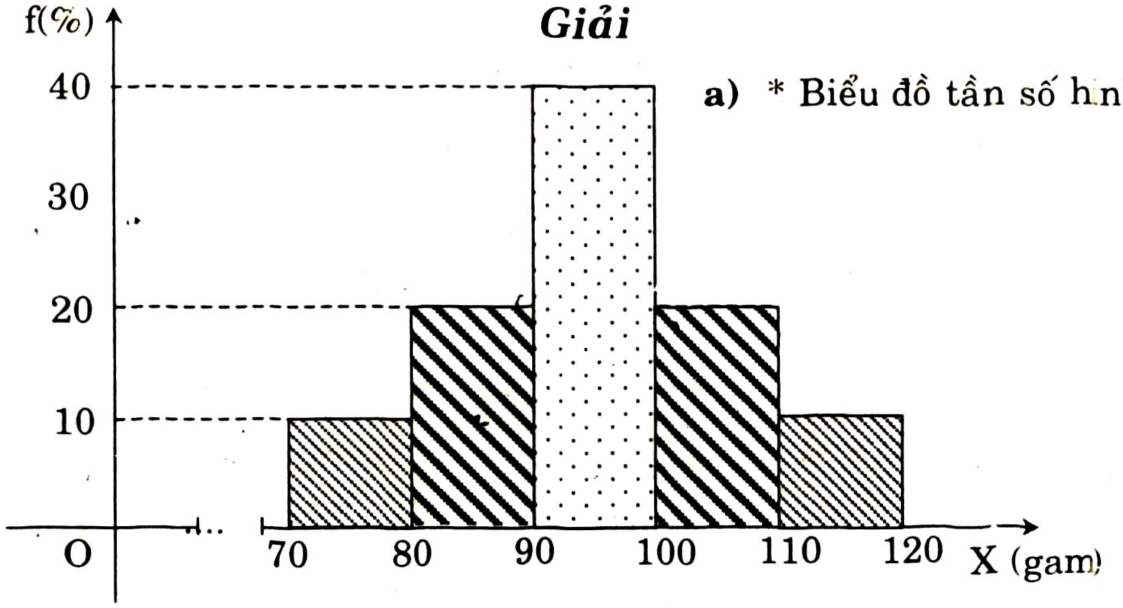
**a)** Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình cột, đường gấp khúc tần suất (để mô tả bảng phân bố tần số ghép lớp)

**b)** Hãy vẽ biểu đồ tần số hình cột, đường gấp khúc tần số (để mô tả bảng phân bố tần số ghép lớp)

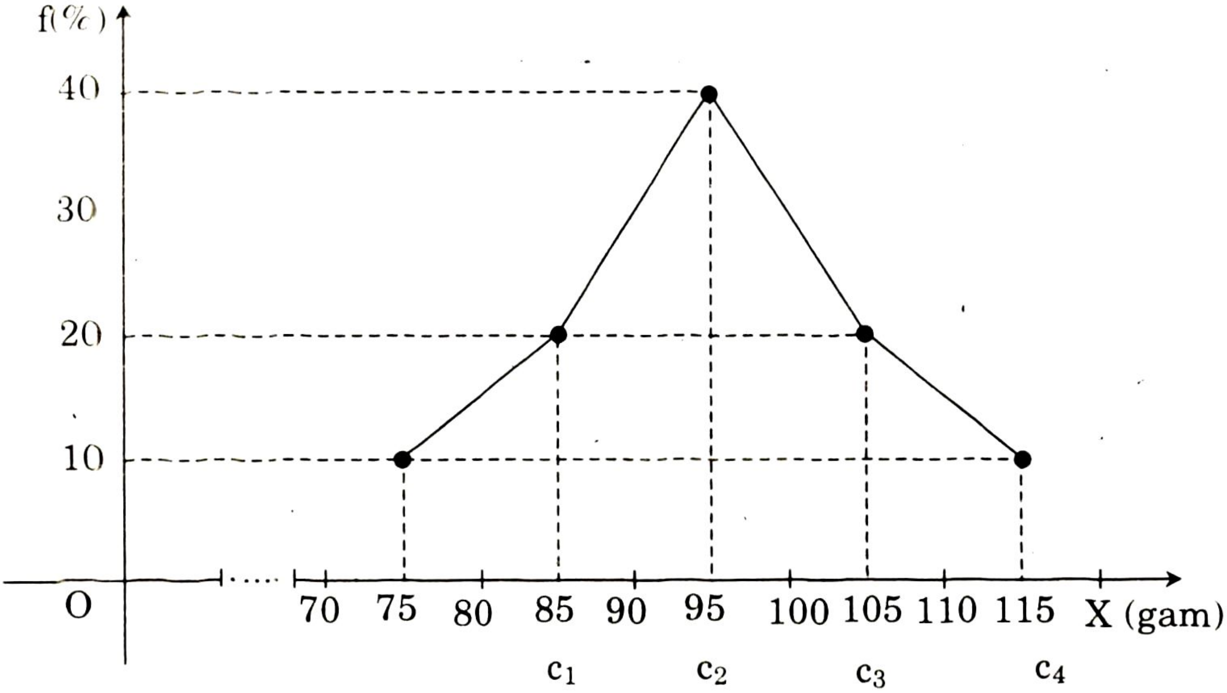
**c)** Dựa vào biểu đồ tần số hình cột đã được vẽ ở câu a), hãy nêu rõ trong 30 củ khoai tây được khảo sát, số củ có khối lượng từ 100 gam trở lên chiếm bao nhiêu phần trăm.

### *Giải*

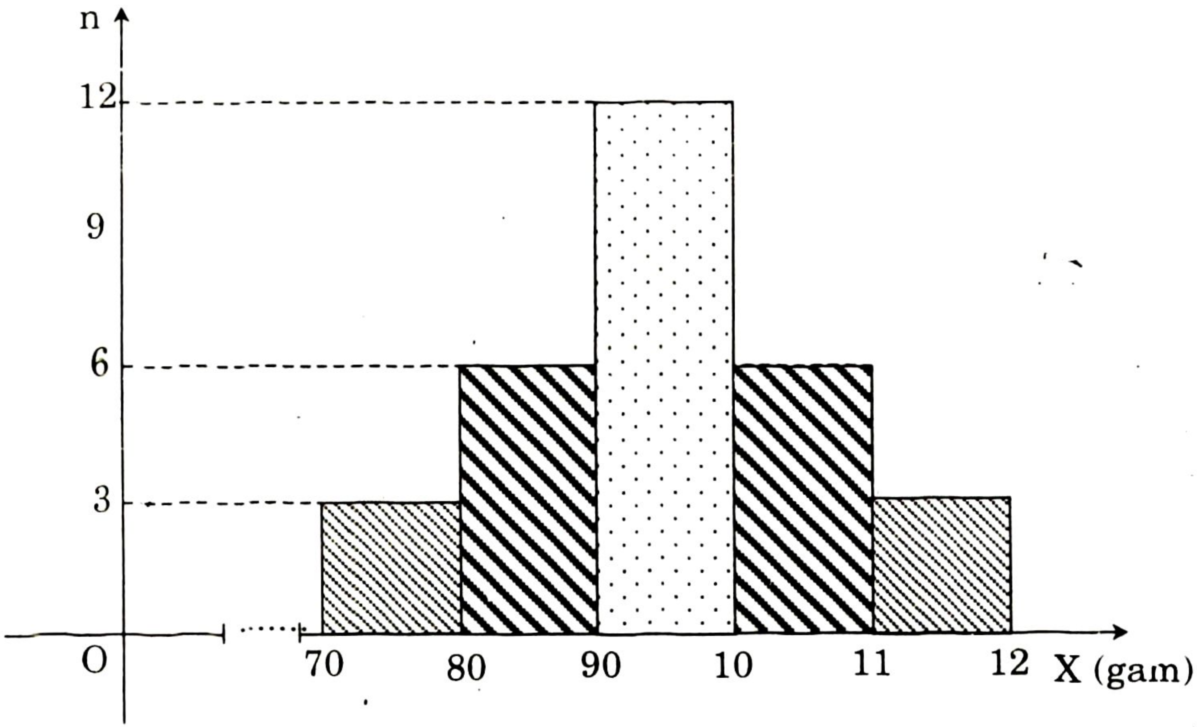
**a)** * Biểu đồ tần số hình cột



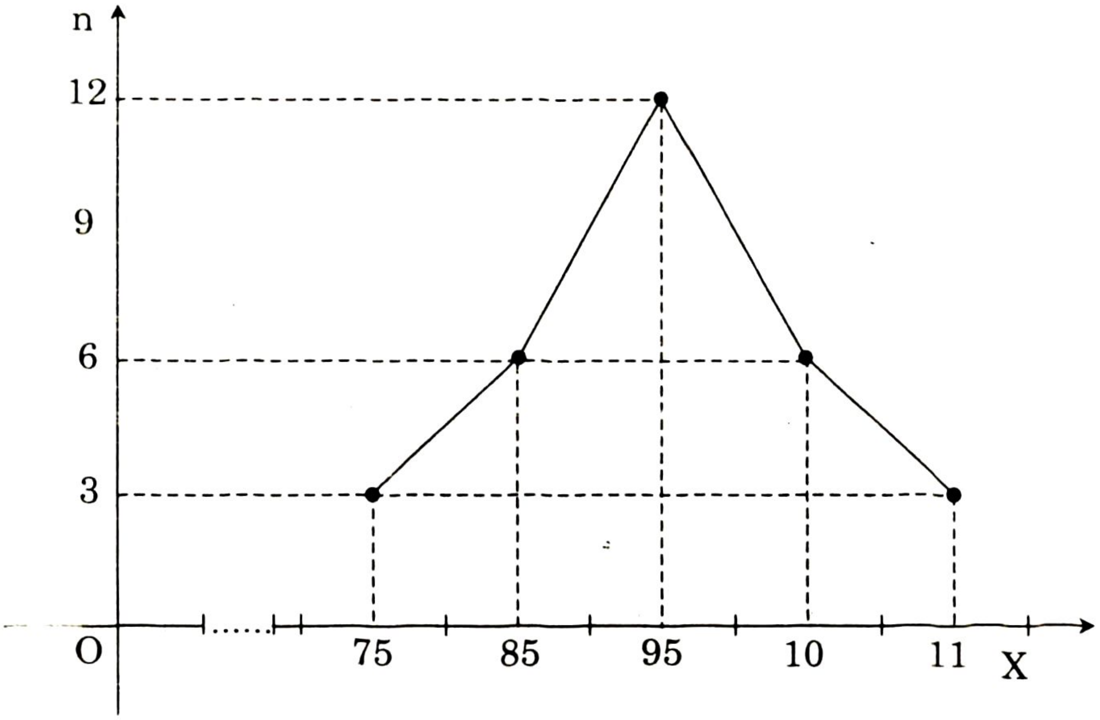
* Đường gấp khúc tần suất



* Biểu đồ tần số hình cột



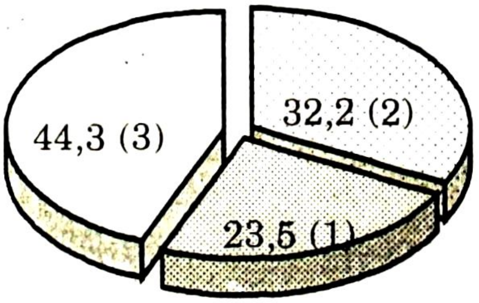
* Đường gấp khúc tần số



Dựa vào kết quả câu a) ta thấy trong 30 củ khoai tây được khảo sát, số củ khoai có khối lượng từ 100 (gam) trở lên chiếm tỉ lệ:

20% + 10% = 30%

**Bài 3.** Dựa vào biểu đồ hình quạt dưới đây, hãy lập bảng theo mẫu bảng 7 (Sgk)



(1) Khu vực doanh nghiệp nhà nước.

(2) Khu vực ngoài quốc doanh.

(3) Khu vực đầu tư nước ngoài.

Biểu đồ hình quạt về cơ cấu giá trị sản xuất công nghiệp trong nước năm 2000 phân theo thành phần kinh tế (%)

### *Giải*

Ta có bảng cơ cấu giá trị sản xuất công nghiệp trong nước năm 2000 phân theo thành phần kinh tế (%)

| **Các thành phần kinh tế** | **Tỉ trọng (%)** |
|---|---|
| 1. Khu vực doanh nghiệp nhà nước | 23,5 |
| 2. Khu vực ngoài quốc doanh | 32,2 |
| 3. Khu vực đầu tư nước ngoài | 44,3 |
| Cộng | 100% |

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 4.** Cho bảng phân phối tần suất ghép lớp

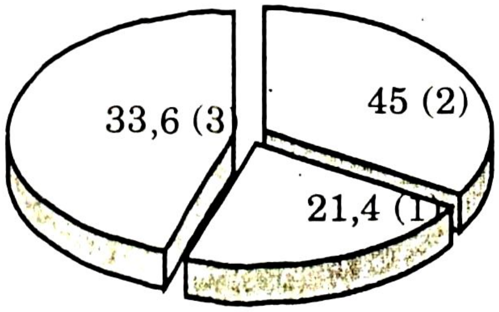
Nhiệt độ trung bình của tháng 12 tại thành phố Hồ Chí Minh từ 1970 đến hết 2000 (30 năm)

| Các lớp nhiệt độ X (°C) | Tần số $n_i$ | Tần suất f(%) |
|---|---|---|
| [15; 17) | 10 | 20 |
| [17; 19) | 24 | 48 |
| [19; 21) | 8 | 16 |
| [21; 23] | 8 | 16 |
| Cộng | 50 | 100% |

**a)** Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình cột, đường gấp khúc tần suất (để mô tả bảng trên).

**b)** Dựa vào a) hãy nêu rõ trong những năm được khảo sát, nhiệt độ từ 19 trở lên chiếm tỉ lệ bao nhiêu phần trăm?

**Bài 5.** Dựa vào biểu đồ hình quạt dưới đây hãy lập bảng theo mẫu bảng 7 §2 (SGK)



(1) Khu vực doanh nghiệp nhà nước

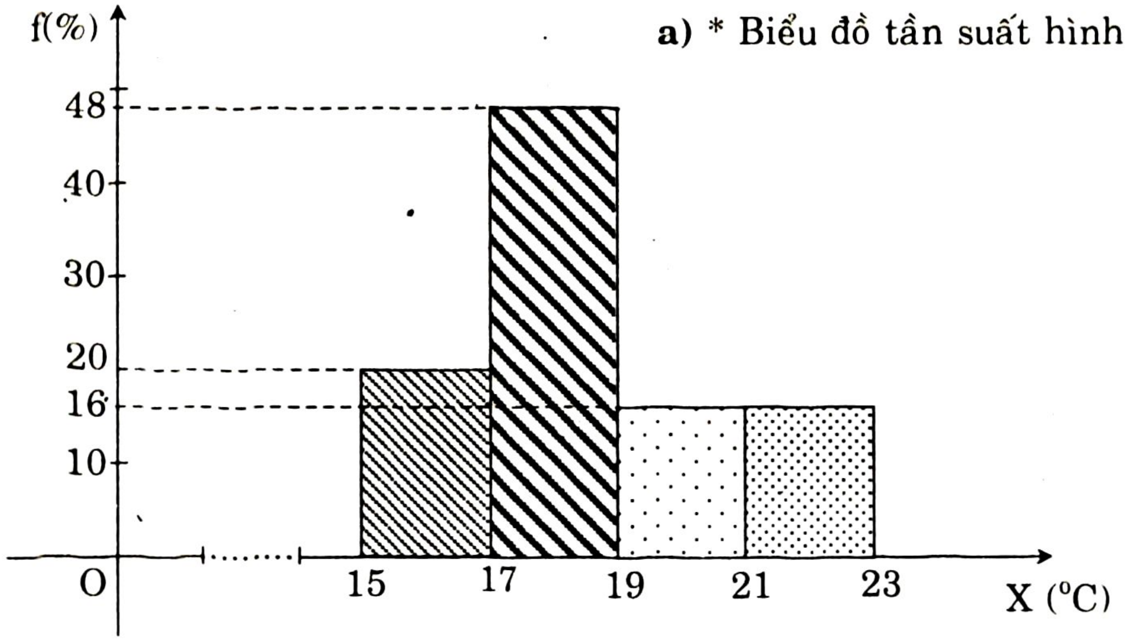
(2) Khu vực ngoài quốc doanh

(3) Khu vực đầu tư nước ngoài.

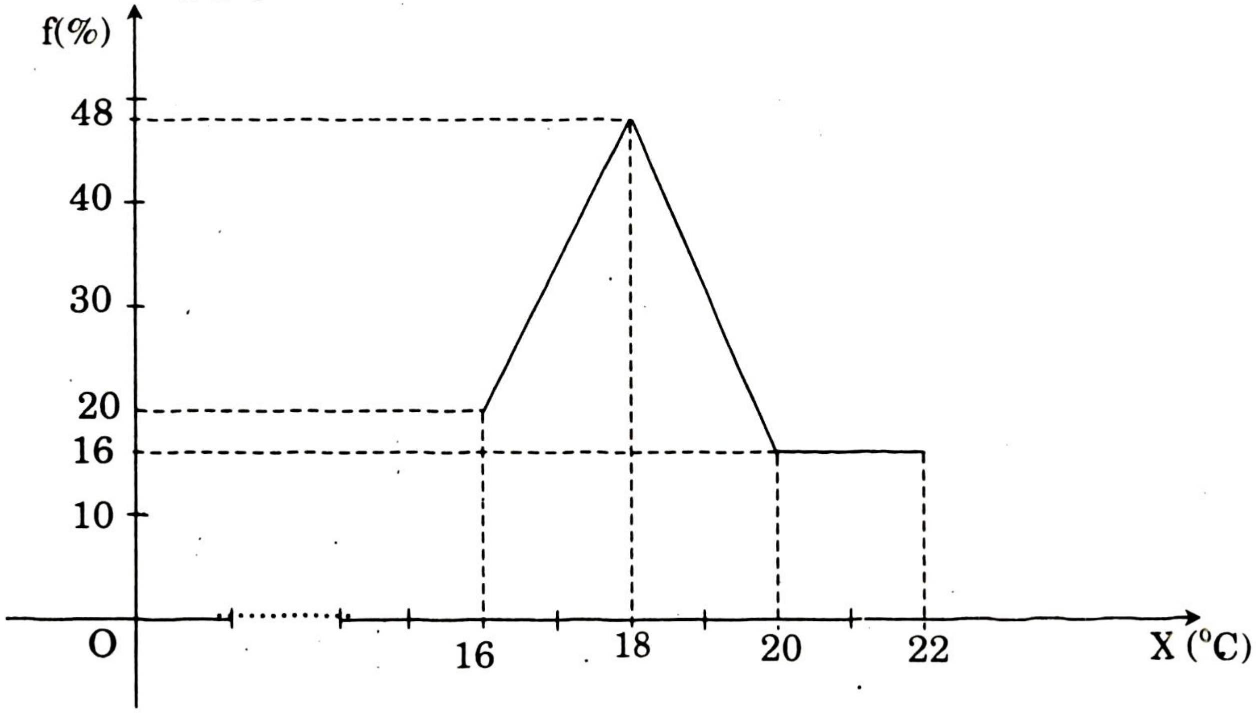
## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 4.**

**a)** * Biểu đồ tần suất hình cột



* Đường gấp khúc tần suất



**b)** Từ bảng trên ta thấy nhiệt độ từ 19 độ trở lên chiếm:

16% + 16% = 32%

**Bài 7.** Bảng cơ cấu giá trị sản xuất công nghiệp trong nước.

| Các thành phần kinh tế | Tỉ trọng (%) |
|---|---|
| 1. Khu vực doanh nghiệp nhà nước | 21,4 |
| 2. Khu vực ngoài quốc doanh | 45,0 |
| 3. Khu vực đầu tư nước ngoài | 33,0 |
| Cộng | 100% |

# §3. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. MỐT. SỐ TRUNG VỊ

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Số trung bình cộng

Số trung bình cộng ký hiệu là $\bar{x}$.

* Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng phân bố tần số rời rạc thì ta có:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k) = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_kx_k.$$

* Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng một bảng phân bố ghép lớp thì ta có:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1c_1 + n_2c_2 + ... + n_kc_k) = \frac{1}{n}(f_1c_1 + f_2c_2 + ... + f_kc_k).$$

với $c_i$, $n_i$, $f_i$ lần lượt là giá trị trung tâm, tần số, tần suất của lớp thứ i, n là số các số liệu thống kê ($n = n_1 + n_2 + ... + n_k$).

**2. Mốt:**

Cho một mẫu số liệu dưới dạng bảng phân bố tần số. Giá trị có tần số lớn nhất được gọi là mốt của mẫu số liệu và kí hiệu: $M_0$.

**3. Số trung vị:**

Sắp thứ tự các số liệu thống kê thành dãy không giảm. Số đứng giữa của dãy sắp xếp thứ tự này là số trung vị, kí hiệu là $M_e$.

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Hãy tính số trung bình cộng của các bảng phân bố, đã được lập ở các bài tập số 1 và số 2 của §1.

### *Giải*

* Đối với bảng phân số tần số rời rạc ở bảng §1 ta có:

$$\bar{x} = \frac{1}{30}(3.1150 + 6.1160 + 12.1170 + 6.1180 + 3.1190) = 1170.$$

* Đối với bảng phân bố tần số ghép lớp ở bài 2, §1 ta có:

$$\bar{x} = \frac{1}{60}(8.15 + 18.25 + 24.35 + 10.45) = 31.$$

**Bài 2.** Để tìm hiểu tình hình học tập toán của hai lớp 10A, 10B, người ta cho hai lớp đó đồng thời làm bài thi môn toán theo cùng một đề thi và lập được hai bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây:

Điểm thi X của lớp 10A

| Các lớp giá trị của X | Giá trị trung tâm $c_i$ | Tần số $n_i$ |
|---|---|---|
| [0; 2) | 1 | 2 |
| [2; 4) | 3 | 4 |
| [4; 6) | 5 | 12 |
| [6; 8) | 7 | 28 |
| [8; 10) | 9 | 4 |
| Cộng | | 50 |

Điểm thi Y của lớp 10B

| Các lớp giá trị của Y | Giá trị trung tâm $c_i$ | Tần số $n_i$ |
|---|---|---|
| [0; 2) | 1 | 2 |
| [2; 4) | 3 | 10 |
| [4; 6) | 5 | 18 |
| [6; 8) | 7 | 14 |
| [8; 10) | 9 | 5 |
| Cộng | | 51 |

Hãy tính số trung bình cộng $\overline{x}$, $\overline{y}$ của hai bảng phân bố ở trên và nêu nhận xét về kết quả làm bài thi của 2 lớp.

## *Giải*

* Số trung bình cộng:

$$\overline{x} = \frac{1}{50}(2.1 + 4.3 + 12.5 + 28.7 + 4.9) = 6{,}12 \text{ (điểm)}$$

* Số trung bình cộng:

$$\overline{y} = \frac{1}{51}(4.1 + 10.3 + 18.5 + 14.7 + 5.9) \approx 5{,}24 \text{ (điểm)}$$

* *Nhận xét:*

Theo trên ta có $\overline{x} = 6{,}12$ (điểm), $\overline{y} \approx 5{,}24$ (điểm)

Vậy học sinh lớp 10A có điểm trung bình cao hơn học sinh lớp 10B (tức là học sinh lớp 10A có kết quả làm bài tốt hơn học sinh lớp 10B)

**Bài 3.** Điều tra tiền lương hàng tháng của 30 công nhân của một xưởng may, ta có bảng phân bố tần số sau:

Tiền lương của 30 công nhân xưởng may:

| Tiền lương $x_i$ (nghìn đồng) | 300 | 500 | 700 | 800 | 900 | 1000 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 3 | 5 | 6 | 5 | 6 | 5 | 30 |

Hãy tìm mốt $M_0$ của bảng phân bố đã cho:

## *Giải*

Từ bảng đã cho ta thấy có hai giá trị có tần số bằng nhau và bằng 6 (đó là $x_3 = 700$ và $x_5 = 900$).

Vậy ta có hai mốt là: $M_0^{(1)} = 700$ và $M_0^{(2)} = 900$.

**Bài 4.** Tiền lương hàng tháng của 7 nhân viên trong một công ty du lịch là như sau (đơn vị: nghìn đồng): 650, 840, 690, 720, 2500, 670, 3000. Hãy tìm số trung vị của số bậc thống kê đã cho.

### *Giải*

Ta sắp thứ tự các số liệu thống kê đã cho thành dãy không giảm sau: 650, 670, 690, 720, 840, 2500, 3000.

Từ đó ta có số trung vị $M_e = 720$.

**Bài 5.** Cho biết tình hình thu hoạch lúa vụ mùa năm 1980 của 3 hợp tác xã ở địa phương V như sau:

| Tên hợp tác xã | Năng suất lúa (tạ/ha) | Diện tích trồng lúa (ha) |
|---|---|---|
| A | 40 | 150 |
| B | 38 | 130 |
| C | 36 | 120 |

Hãy tính năng suất lúa trung bình của vụ mùa năm 1980 trong toàn bộ ba hợp tác xã nói trên.

### *Giải*

Ta xem năng suất lúa (tạ/ha) của 3 xã A, B, C là $x_i$.

Diện tích trồng lúa của 3 xã là $n_i$ khi đó ta có năng suất lúa trung bình của vụ mùa năm 1980 trong toàn bộ 3 xã là $\overline{x}$ với:

$$\overline{x} = \frac{1}{150 + 130 + 120}\left(150.40 + 130.38 + 120.36\right) = 38{,}15$$

*Đáp số*: 38,15 (tạ/ha) .

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 6.** Điểm thi học sinh giỏi của hai tỉnh A và B trong kì thi học sinh giỏi toàn quốc môn Toán được cho bởi hai bảng phân bố tần số ghép lớp sau:

Điểm thi X của học sinh tỉnh A

| Các lớp giá trị của X | Giá trị trung tâm $c_i$ | Tần số $n_i$ |
|---|---|---|
| [0; 4) | 2 | 1 |
| [4; 8) | 6 | 2 |
| [8; 12) | 10 | 2 |
| [12; 16) | 14 | 4 |
| [16; 20] | 18 | 1 |
| | | 10 |

Điểm thi Y của học sinh tỉnh B

| Các lớp giá trị của Y | Giá trị trung tâm $c_i$ | Tần số $n_i$ |
|---|---|---|
| [0; 4) | 2 | 1 |
| [4; 8) | 6 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| [8; 12) | 10 | 2 |
| [12; 16) | 14 | 5 |
| [16; 20] | 18 | 1 |
| | | 10 |

Hãy tính các số trung bình cộng $\overline{x}$ và $\overline{y}$ của hai bảng phân bố ở trên và nêu nhận xét về kết quả làm bài thi của hai tỉnh A và B.

**Bài 7.** Điều tra về tai nạn giao thông hàng tháng của 30 tỉnh ta có bảng phân bố tần số sau:

Tai nạn giao thông hàng tháng của 30 tỉnh

| Số vụ tai nạn giao thông $x_i$ | 27 | 30 | 44 | 52 | 60 | 62 | 64 | 68 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 1 | 4 | 3 | 6 | 4 | 6 | 4 | 2 | 30 |

Hãy tìm mốt $M_0$ của bảng phân bố đã cho.

**Bài 8.** Tiền lãi hàng tháng của 9 cửa hàng như sau (đơn vị: triệu đồng)

30, 28, 48, 52, 56, 28, 34, 41, 25

Hãy tìm số trung vị của các số liệu thống kê đã cho.

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 6.** $\overline{x} = 10{,}8$ (điểm)

$\overline{y} = 11{,}6$ (điểm)

* *Nhận xét*: Từ kết quả trên ta thấy điểm trung bình của học sinh tỉnh A thấp hơn điểm trung bình của học sinh tỉnh B. Như vậy trong kì thi học sinh giỏi toàn quốc đã nêu trên kết quả làm bài thi của học sinh tỉnh B tốt hơn học sinh tỉnh A.

**Bài 7.** $M_0^{(1)} = 52$ và $M_0^{(2)} = 62$.

**Bài 9.** Số trung vị cần tìm là: $M_e = 34$.

# §4. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**1. Phương sai:** Kí hiệu phương sai của một dãy số liệu thống kê là $S_x^2$ và được xác định như sau:

* Trường hợp số liệu thống kê được cho bởi bảng phân bố rời rạc:

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\left[n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \dots n_k(x_k - \overline{x})^2\right]$$

$$= f_1(x_1 - \overline{x})^2 + f_2(x_2 - \overline{x})^2 + \dots + f_k(x_k - \overline{x})^2$$

* Trường hợp bảng phân bố ghép lớp:

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\left[n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \dots n_k(c_k - \bar{x})^2\right]$$

$$= f_1(c_1 - \bar{x})^2 + f_2(c_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_k(c_k - \bar{x})^2$$

* Ngoài ra ta còn chứng minh được:

$$S_x^2 = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2$$

Trong đó $\overline{x^2}$ là trung bình cộng của các bình phương số liệu thống kê và tính như sau:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\left(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \dots + n_kx_k^2\right) = f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + \dots + f_kx_k^2$$

(đối với bảng phân bố rời rạc)

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\left(n_1c_1^2 + n_2c_2^2 + \dots + n_kc_k^2\right) = f_1c_1^2 + f_2c_2^2 + \dots + f_kc_k^2$$

(đối với bảng phân bố ghép lớp)

**2. Độ lệch chuẩn:**

Kí hiệu là $S_x$, được xác định như sau: $S_x = \sqrt{S_x^2}$.

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của các bảng phân bố đã được lập ở bài tập số 1, số 2 của §1.

### *Giải*

Đối với bảng phân bố tần số rời rạc ở bảng 1 của §1 ta có:

$$\bar{x} = \frac{1}{30}(3 \,.\, 1150 + 6 \,.\, 1160 + 12 \,.\, 1170 + 6 \,.\, 1180 + 3 \,.\, 1190) = 1170$$

$$\Rightarrow \quad (\bar{x})^2 = (1170)^2 = 1368900.$$

Và $\overline{x^2} = \frac{1}{30}(3.(1150)^2 + 6.(1160)^2 + 12.(1170)^2 + 6.(1180)^2 + 3.(1190)^2)$

$$= 1369020$$

* Vậy ta có phương sai:

$$S_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 1369020 - 1368900 = 120.$$

* Độ lệch chuẩn:

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{120} \approx 11 \text{ (giờ)}.$$

Đối với bảng phân bố tần số ghép lớp ở bài 2, §1 ta có:

$\bar{x} = \frac{1}{60}(8 \,.\, 15 + 18 \,.\, 25 + 24 \,.\, 35 + 10 \,.\, 45) = 31$ (xem bài 1 của §3)

$\Rightarrow \quad (\overline{x})^2 = (31)^2 = 961$

$\Rightarrow \quad \overline{x^2} = \frac{1}{60}[8.(15)^2 + 18.(25)^2 + 24.(35)^2 + 10.(45)^2] = 1045$

$\Rightarrow \quad S_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = 1045 - 961 = 84.$

Độ lệch chuẩn:

$S_x = \sqrt{S_x^2} \approx 9{,}2$ (cm).

**Bài 2.** Người ta chọn hai lớp 10C và 10D của một trường trung học phổ thông, đồng thời làm bài thi môn Văn theo cùng một đề thi. Kết quả thi được trình bày ở hai bảng phân bố tần số (rời rạc) sau đây:

Điểm thi X của lớp 10C:

| Điểm thi $x_i$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 3 | 7 | 12 | 14 | 3 | 1 | 40 |

Điểm thi Y của lớp 10D:

| Điểm thi $y_i$ | 6 | 7 | 8 | 9 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 8 | 18 | 10 | 4 | 40 |

**a)** Hãy tính các số trung bình cộng, phương sai, độ lệch chuẩn của các bảng phân bố đã cho.

**b)** Hãy xét xem kết quả làm bài thi của môn Văn ở lớp nào là đều hơn ?

### *Giải*

**a)** * Số trung bình cộng điểm thi lớp 10C là:

$$\overline{x} = \frac{1}{40}(3 \,.\, 5 + 6 \,.\, 7 + 7 \,.\, 12 + 8 \,.\, 14 + 9 \,.\, 3 + 10 \,.\, 1) = 7{,}25$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{40}(3 \,.\, 5^2 + 6^2 \,.\, 7 + 7^2 \,.\, 12 + 8^2 \,.\, 14 + 9^2 \,.\, 3 + 10^2 \,.\, 1) = 53{,}85.$$

Ta có phương sai: $S_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = -(7{,}25)^2 + 53{,}85 \approx 1{,}29.$

Độ lệch chuẩn: $S_x = \sqrt{S_x^2} \approx 1{,}14$ (điểm).

* Số trung bình cộng điểm thi của lớp 10D là:

$$\overline{y} = \frac{1}{40}(8 \,.\, 6 + 18 \,.\, 7 + 10 \,.\, 8 + 4 \,.\, 9) = 7{,}25$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{40}(8 \,.\, 6^2 + 18 \,.\, 7^2 + 10 \,.\, 8^2 + 4 \,.\, 9^2) = 53{,}35.$$

Phương sai: $S_y^2 = 53{,}35 - (7{,}25)^2 \approx 0{,}79.$

Độ lệch chuẩn: $S_y = \sqrt{S_y^2} \approx 0{,}89.$

**b)** Theo a) ta có: $S_x > S_y$. Vậy kết quả bài làm môn Văn ở lớp 10D đều hơn kết quả bài thi môn Văn của học sinh lớp 10C.

**Bài 3.** Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau:

* Khối lượng X của nhóm cá mè thứ 1:

| Các lớp giá trị của X (kg) | [0,6; 0,8) | [0,8; 1,0) | [1,0; 1,2) | [1,2; 1,4] | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|
| Giá trị trung tâm $c_i$ | 0,7 | 0,9 | 1,1 | 1,3 | |
| Tần số $n_i$ | 4 | 6 | 6 | 4 | 20 |

* Khối lượng Y của nhóm cá mè thứ 2:

| Các lớp giá trị của Y (kg) | [0,5; 0,7) | [0,7; 0,9) | [0,9; 1,1) | [1,1; 1,3) | [1,3; 1,5) | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Giá trị trung tâm $c_i$ | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | |
| Tần số $n_i$ | 3 | 4 | 6 | 4 | 3 | 20 |

**a)** Hãy tính các số trung bình cộng $\overline{x}$, $\overline{y}$ của các bảng phân bố đã cho. Sử dụng kết quả $S_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$, hãy tính phương sai $S_x^2$, $S_y^2$ các bảng phân bố đã cho.

**b)** Hãy xét xem nhóm cá nào có khối lượng đồng đều hơn.

## *Giải*

**a)** * Số trung bình cộng:

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(4\,.\,0,7 + 6\,.\,0,9 + 6\,.\,1,1 + 4\,.\,1,3) = 1$$

và $$\overline{x^2} = \frac{1}{20}[4.(0,7)^2 + 6.(0,9)^2 + 6.(1,1)^2 + 4.(1,3)^2] \approx 1,04.$$

Suy ra phương sai: $S_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 \approx 1,04 - 1 = 0,04$

Vậy $S_x^2 \approx 0,04$.

* Số trung bình cộng:

$$\overline{y} = \frac{1}{20}(3\,.\,0,6 + 4\,.\,0,8 + 6\,.\,1,0 + 4\,.\,1,2 + 3\,.\,1,4) = 1$$

và $$\overline{y^2} = \frac{1}{20}[3.(0,6)^2 + 4.(0,8)^2 + 6.(1,0)^2 + 4.(1,2)^2 + 3.(1,4)^2] \approx 1,06$$

Suy ra phương sai: $S_y^2 \approx 1,06 - 1 = 0,06$.

Vậy $S_y^2 \approx 0,06$.

**b)** Theo a ta có:

$S_x^2 \approx 0,04 \quad \Rightarrow \quad S_x \approx 0,2$ (kg)

$S_y^2 \approx 0,06 \quad \Rightarrow \quad S_y \approx 0,25$ (kg)

Vậy $S_y > S_x$ nên nhóm cá thứ 1 đồng đều hơn nhóm cá thứ 2.

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 4.** 100 học sinh tham gia kỳ thi học sinh giỏi Toán (thang điểm 20) kết quả được cho trong bảng sau:

| Điểm $x_i$ | 8 | 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 1 | 4 | 15 | 25 | 20 | 15 | 14 | 4 | 2 |

**a)** Tính số trung bình.

**b)** Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

**c)** Tính số trung vị và mốt.

**Bài 5.** Cho hai bảng tần số ghép lớp sau:

* Chiều dài X của nhóm cá sấu thứ 1 (đơn vị mét)

| Các lớp giá trị của X (mét) | [2; 2,8) | [2,8; 3,6) | [3,6; 4,4) | [4,4; 5,2) | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|
| Giá trị trung tâm $c_i$ | 2,4 | 3,2 | 4,0 | 4,8 | |
| Tần số $n_i$ | 4 | 8 | 8 | 4 | 24 |

* Chiều dài Y của nhóm cá sấu thứ 2 (đơn vị mét)

| Các lớp giá trị của Y (mét) | [1,2; 2) | [2; 2,8) | [2,8; 3,6) | [3,6; 4,4) | [4,4; 5,2) | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Giá trị trung tâm $c_i$ | 1,6 | 2,4 | 3,2 | 4,0 | 4,8 | |
| Tần số $n_i$ | 1 | 2 | 10 | 8 | 3 | 24 |

**a)** Hãy tính số trung bình của hai nhóm đã cho.
Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

**b)** Hãy xét xem nhóm cá sấu nào có chiều dài đều hơn.

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 4.**

**a)** * Số trung bình: $\overline{x} = 13,86$

**b)** * Phương sai: $S_x^2 \approx 3,22$.

* Độ lệch chuẩn: $S_x = \sqrt{S_x^2} \approx \sqrt{3,22} \approx 1,79$.

**c)** * Số trung vị $M_e = 14$.

* Mốt $M_o = 13$.

**Bài 5.**

**a)** Gọi số trung bình của nhóm thứ nhất là $\overline{x}$, phương sai $S_x^2$, độ lệch chuẩn $S_x$ ta có: $\overline{x} = 3,6$; $S_x^2 \approx 0,59$

* Gọi số trung bình của nhóm thứ 2 là $\overline{y}$, phương sai $S_y^2$, độ lệch chuẩn $S_y$. Ta có: $\overline{y} \approx 3,53$; $S_y^2 \approx 0,58$; $S_y \approx 0,76$.

**b)** Từ a ta có $S_x > S_y$, vậy nhóm cá sấu thứ 2 có chiều dài đều hơn.

# ÔN TẬP CHƯƠNG V

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**1. Bảng phân bố tần số, tần suất**

* Khái niệm số liệu thống kê và tần số.

* Tần suất.

* Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp.

**2. Biểu đồ tần suất**

* Biểu đồ tần suất hình cột.

* Đường gấp khúc tần suất.

* Biểu đồ hình quạt.

**3. Số trung bình cộng, mốt, số trung vị**

* Số trung bình cộng.

* Mốt.

* Số trung vị.

**4. Phương sai và độ lệch chuẩn**

* Phương sai.

* Độ lệch chuẩn.

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Hãy chỉ rõ các bước để:

**a)** Lập bảng phân bố tần suất ghép lớp.

**b)** Lập bảng phân bố tần số ghép lớp.

### *Hướng dẫn*

**a)** Các bước lập bảng phân bố tần suất ghép lớp.

*Bước 1:* Nhóm các giá trị đã cho thành từng lớp: $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, m}$.

*Bước 2:* Tính giá trị trung tâm: $c_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$, $i = \overline{1, m}$.

*Bước 3:* Tính tần số $n_i$ từ đó $\Rightarrow$ tần suất $f_i(\%) = \dfrac{n_i}{n}$.

*Bước 4:* Lập bảng sau:

| Giá trị của x (được chia lớp) | Giá trị trung tâm $c_i$ | Tần suất $f_i(\%)$ |
|---|---|---|
| $[x_0; x_1)$ | $c_1$ | $f_1$ |
| $[x_1; x_2)$ | $c_2$ | $f_2$ |
| $[x_2; x_3)$ | $c_3$ | $f_3$ |
| ... | ... | ... |
| $[x_{m-1}; x_m]$ | $c_m$ | $f_m$ |
| Cộng | | 100% |

**b)** Các bước lập bảng phân bố tần số ghép lớp:

*Bước 1:* Nhóm các giá trị đã cho thành từng lớp $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, m}$.

*Bước 2:* Tính giá trị trung tâm $c_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$, $i = \overline{1, m}$.

*Bước 3:* Tính tần số $n_i$.

*Bước 4:* Lập bảng sau:

| Giá trị của x (được chia lớp) | Giá trị trung tâm | Tần số $n_i$ |
|---|---|---|
| $[x_0; x_1)$<br>$[x_1; x_2)$<br>$[x_2; x_3)$<br>...<br>$[x_{m-1}; x_m]$ | $c_1$<br>$c_2$<br>$c_3$<br>...<br>$c_m$ | $n_1$<br>$n_2$<br>$n_3$<br>...<br>$n_m$ |
| Cộng | | Tổng n |

**Bài 2.** Hãy nêu rõ cách tính của: Số trung bình cộng, số trung vị, mốt, phương sai và độ lệch chuẩn.

### *Hướng dẫn*

* Đối với bảng phân bố rời rạc ta có số trung bình.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k) = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_kx_k.$$

Trong đó $n_i$, $f_i$ lần lượt là tần số tần suất của $x_i$, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

- Mốt của một bảng phân bố tần số là giá trị có tần số lớn nhất và kí hiệu $M_o$. Vậy từ bảng phân bố tần số ta suy ra $M_o$.
- Số trung vị: Sắp thứ tự các số liệu thống kê thành một dãy không giảm, số đứng giữa của dãy sắp thứ tự là số trung vị, kí hiệu $M_e$.
- *Chú ý:* Nếu dãy có n số liệu và n chẵn thì ta lấy số trung bình cộng của hai số liệu đứng thứ $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2} + 1$ làm số trung vị.
- Phương sai:

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\left[n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \ldots n_k(x_k - \overline{x})^2\right]$$

hoặc $S_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$

với $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\left(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \ldots + n_kx_k^2\right) = f_1x_1^2 + \ldots + f_kx_k^2$

- Độ lệch chuẩn: $S_x = \sqrt{S_x^2}$.

* Đối với bảng phân bố tần số ghép ta có:

– Số trung bình cộng:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1c_1 + n_2c_2 + \ldots + n_kc_k) = f_1c_1 + f_2c_2 + \ldots + f_kc_k$$

Trong đó $c_i$, $n_i$, $f_i$ lần lượt là giá trị trung tâm, tần số, tần suất của lớp thứ i, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

– Mốt và số trung vị tính tương tự như ở bảng phân bố tần số rời rạc.

– Phương sai:

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\left[n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \ldots n_k(c_k - \bar{x})^2\right]$$

$$= f_1(c_1 - \bar{x})^2 + f_2(c_2 - \bar{x})^2 + \ldots + f_k(c_k - \bar{x})^2$$

hoặc $S_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$

với $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\left(n_1c_1^2 + n_2c_2^2 + \ldots + n_kc_k^2\right) = f_1c_1^2 + f_2c_2^2 + \ldots + f_kc_k^2$

– Độ lệch chuẩn: $S_x = \sqrt{S_x^2}$.

**Bài 3.** Kết quả điều tra 59 hộ gia đình của một vùng dân cư về "Số con của mỗi hộ gia đình" như sau:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 | 1 |
| 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 2 | 2 | 4 | 3 | 2 | 2 | 4 | 3 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 4 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | |

**a)** Hãy lập bảng phân bố tần số tần suất rời rạc (theo dấu hiệu được nghiên cứu).

**b)** Nêu nhận xét về tình hình phân bố của các số liệu thống kê đã cho (giá trị nào chiếm tỉ lệ cao nhất, thấp nhất, ...).

**c)** Hãy tính số trung bình cộng, số trung vị, mốt của các số liệu thống kê đã cho.

## *Giải*

**a)** Bảng phân bố tần số tần suất rời rạc:

| Số con $x_i$ | Tần số $n_i$ | Tần suất $f_i$(%) |
|---|---|---|
| 1 | 15 | 25,4 |
| 2 | 22 | 37,3 |
| 3 | 16 | 27,1 |
| 4 | 6 | 10,2 |
| Cộng | 59 | 100% |

**b)** Từ bảng ở a ta có giá trị $x_2 = 2$ chiếm tỉ lệ cao nhất 37,3%, giá trị $x_4 = 4$ chiếm tỉ lệ thấp nhất 10,2%.

Như vậy số hộ gia đình có số con là 2 chiếm tỉ lệ cao nhất và số hộ có số con là 4 chiếm tỉ lệ thấp nhất.

**c)** * Số trung bình cộng $\overline{x} = \frac{1}{59}(1 \,.\, 15 + 2 \,.\, 22 + 3 \,.\, 16 + 4 \,.\, 6) \approx 2{,}22$

* Số trung vị: $M_e = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$.

* Mốt: $M_o = 2$ (Do $x_2 = 2$ có tần số lớn nhất $n_2 = 22$).

**Bài 4.** Cho bảng số liệu thống kê sau:

Khối lượng (tính theo gam) của nhóm cá thứ nhất.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 645 | 650 | 645 | 644 | 650 | 635 | 650 | 654 |
| 650 | 650 | 650 | 643 | 650 | 630 | 647 | 650 |
| 645 | 650 | 645 | 642 | 652 | 635 | 647 | 652 |

Khối lượng (tính theo gam) của nhóm cá thứ hai.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 640 | 650 | 645 | 650 | 643 | 645 | 650 | 650 | 642 |
| 640 | 650 | 645 | 650 | 641 | 650 | 650 | 649 | 645 |
| 640 | 645 | 650 | 650 | 644 | 650 | 650 | 645 | 640 |

**a)** Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp theo nhóm cá thứ nhất với các lớp là:

[630; 635), [635; 640), [640; 645), [645; 650), [650; 655].

**b)** Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp theo nhóm cá thứ hai với các lớp là:

[638; 642), [642; 646), [646; 650), [650; 654].

**c)** Hãy mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã được lập ở câu a bằng cách vẽ:

– Biểu đồ tần suất hình cột.

– Đường gấp khúc tần suất.

**d)** Hãy mô tả bảng phân bố tần số ghép lớp đã được lập ở câu b, bằng cách vẽ:

– Biểu đồ tần số hình cột.

– Đường gấp khúc tần số.

**e)** Hãy tính số trung bình cộng, phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê trong hai bảng số liệu đã cho.

Từ đó, hãy xét xem nhóm cá nào có khối lượng đồng đều hơn.

### *Giải*

a) Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp theo nhóm cá thứ 1 (với các nhóm đã cho).

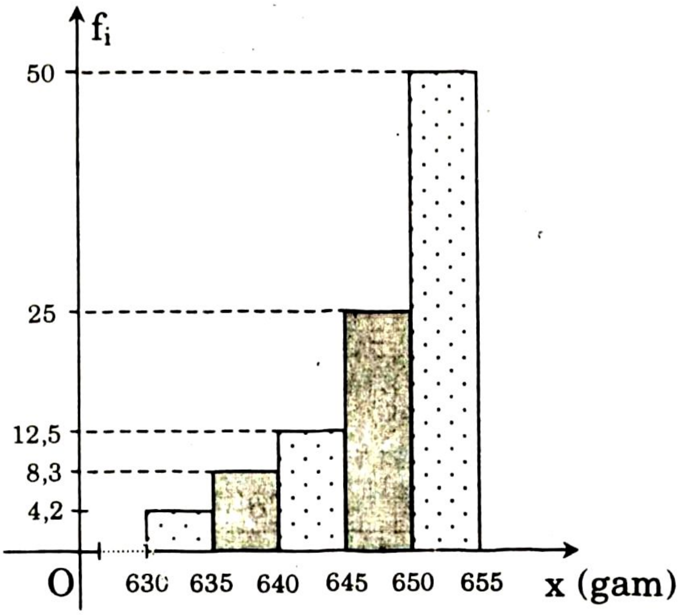
| **Các lớp khối lượng X (gam)** | **Giá trị trung tâm $c_i$** | **Tần số $n_i$** | **Tần suất $f_i$(%)** |
|---|---|---|---|
| [630; 635) | 632,5 | 1 | 4,2 |
| [635; 640) | 637,5 | 2 | 8,3 |
| [640; 645) | 642,5 | 3 | 12,5 |
| [645; 650) | 647,5 | 6 | 25 |
| [650; 655] | 652,5 | 12 | 50 |
| Cộng | | 24 | 100% |

b) Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của nhóm cá thứ 2 (với các lớp đã cho).

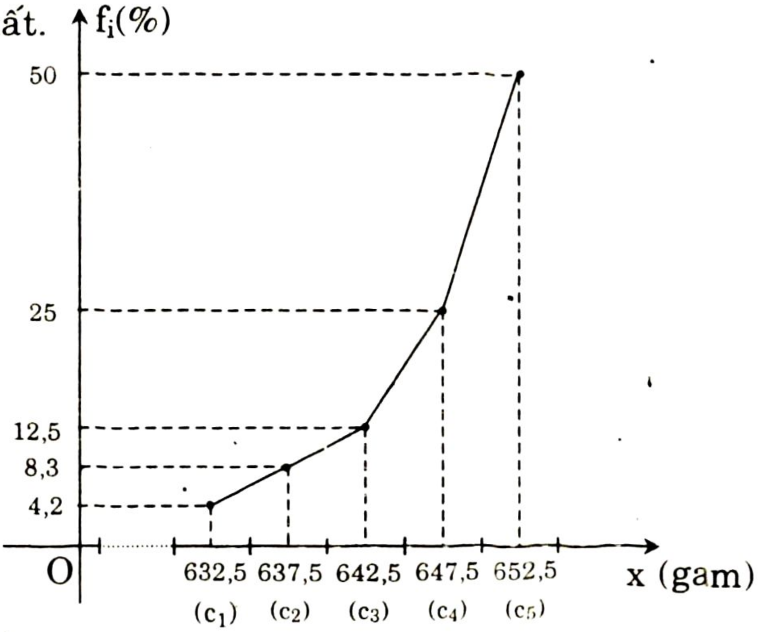
| **Các lớp khối lượng X (gam)** | **Giá trị trung tâm $c_i$** | **Tần số $n_i$** | **Tần suất $f_i$(%)** |
|---|---|---|---|
| [638; 642) | 640 | 5 | 18,5 |
| [642; 646) | 644 | 9 | 33,3 |
| [646; 650) | 648 | 1 | 3,7 |
| [650; 654] | 652 | 12 | 44,5 |
| Cộng | | 27 | 100% |

c) Mô tả bảng ở câu a, bằng cách vẽ:

* Biểu đồ tần suất hình cột.

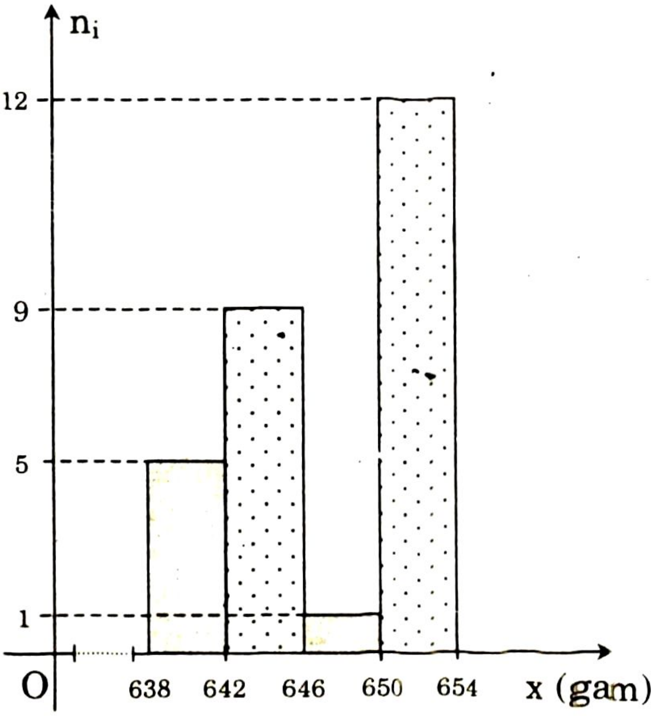


* Đường gấp khúc tần suất.

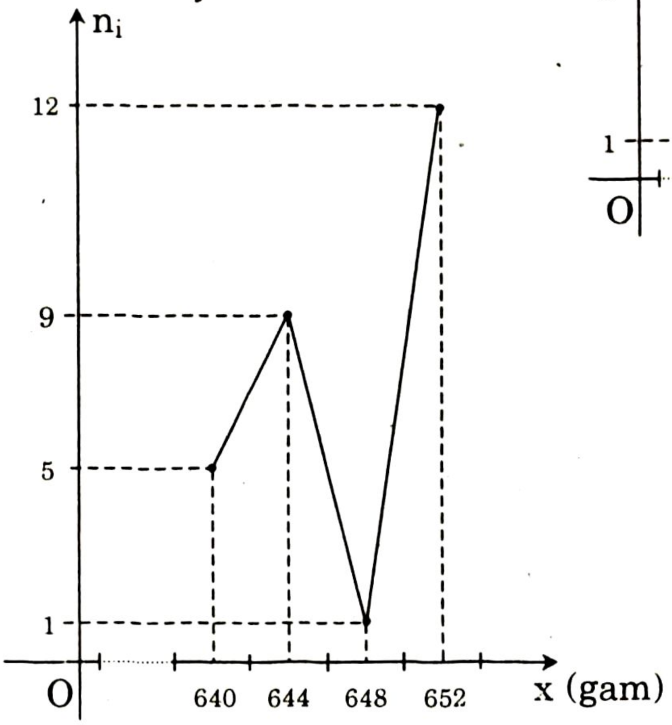


**d)** Mô tả bảng ở câu b, bằng cách vẽ:

* Biểu đồ tần số hình cột



* Đường gấp khúc tần số



e) * Đối với nhóm cá thứ nhất ta có:

Số trung bình:

$$\overline{x} = \frac{1}{24}(1\ .\ 632{,}5 + 2\ .\ 637{,}5 + 3\ .\ 642{,}5 + 6\ .\ 647{,}5 + 12\ .\ 652{,}5) \approx 647{,}92.$$

Phương sai:

$$S_x^2 = \frac{1}{24}[1.(632{,}5 - 647{,}92)^2 + 2.(637{,}5 - 647{,}92)^2 + 3.(642{,}5 - 647{,}92)^2 + 6.(647{,}5 - 647{,}92)^2 + 12.(652{,}5 - 647{,}92)^2] \approx 33{,}16.$$

Độ lệch chuẩn:

$$S_x = \sqrt{S_x^2} \approx \sqrt{33{,}16} \approx 5{,}76.$$

* Đối với nhóm cá thứ 2 ta có:

Số trung bình:

$$\overline{y} = \frac{1}{27}(5\ .\ 640 + 9\ .\ 644 + 1\ .\ 648 + 12\ .\ 652) \approx 646{,}96$$

Phương sai:

$$S_y^2 = \frac{1}{27}[5.(640 - 646{,}96)^2 + 9.(644 - 646{,}96)^2 + 1.(648 - 646{,}96)^2 + 12.(652 - 646{,}96)^2] \approx 23{,}22.$$

Độ lệch chuẩn:

$$S_y = \sqrt{S_y^2} \approx \sqrt{23{,}22} \approx 4{,}82.$$

* Từ trên ta có $S_y < S_x$, vậy nhóm cá thứ 2 đồng đều hơn.

**Bài 5.** Cho bảng số liệu thống kê sau:

Mức lương hàng năm của các nhân viên trong một công ty thuộc ngành điện tử (đơn vị là nghìn đồng).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20910 | 76000 | 20350 | 20060 |
| 21410 | 20110 | 21410 | 21360 |
| 20350 | 21130 | 20960 | 125000 |

Hãy tìm mức lương bình quân của các nhân viên trong công ty. Số trung vị.

## *Giải*

* Mức lương bình quân của các nhân viên trong công ty là:

$$\overline{x} = \frac{1}{12}(20910 + 2\ .\ 21410 + 20350 + 76000 + 20110 + 21130 + 20350 + 20960 + 20060 + 21360 + 125000) = 34087{,}5.$$

* Sắp xếp lại các số liệu thống kê đã cho thành một dãy không giảm:

20060; 20110; 20350; 20350; 20960; 21130;
21360; 21410; 21410; 76000; 125000.

Suy ra số trung vị $M_e = \dfrac{20960 + 21130}{2} = 21045$ (nghìn đồng)

**Bài 6.** Người ta tiến hành thăm dò nhu cầu của khách hàng về các mẫu thử 1, 2, 3, 4, 5 của một loại sản phẩm mới được sản xuất ra ở một nhà máy M. Dưới đây là bảng phân bố tần số theo phiếu tín nhiệm dành cho các mẫu kể trên.

| Mẫu thử $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 2100 | 1860 | 1950 | 2000 | 2090 | 10000 |

**a)** Hãy tìm mốt $M_0$ của bảng phân bố đã cho.

**b)** Trong sản xuất, nhà máy nên ưu tiên cho mẫu nào ?

### *Giải*

**a)** Dễ thấy $x_1 = 1$ có tần số $n_1 = 2100$ (lớn nhất)

Vậy mốt $M_0 = 1$.

**b)** Từ a) ta thấy $M_0 = 1$., như vậy trong sản xuất, nhà máy nên ưu tiên cho mẫu 1 nhiều hơn.

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Tìm mệnh đề đúng (sai) trong các bài tập sau:

**Bài 7.** Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau.

Chiều cao của 40 học sinh lớp 10.

| Các lớp số đo chiều cao X (cm) | [150; 156) | [156; 162) | [162; 168) | [168; 174) | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 7 | 12 | 17 | 4 | 40 |

Mệnh đề đúng là mệnh đề:

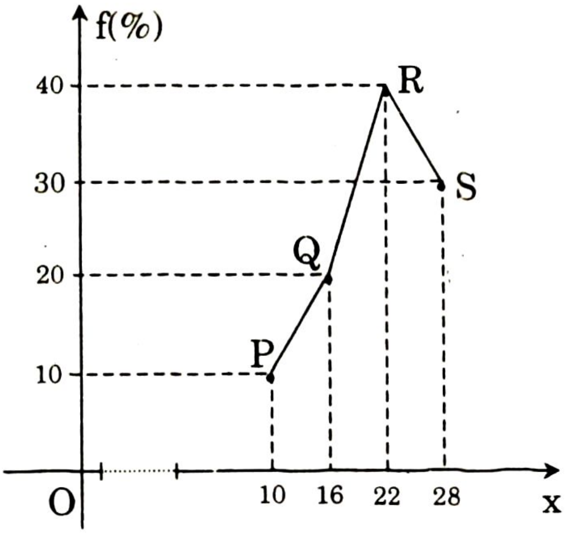
**a)** Giá trị trung tâm của lớp:[150; 156) là 155.

**b)** Tần số của lớp: [156; 162) là 19.

**c)** Tần số của lớp: [168; 174] là 36.

**d)** Số 168 không thuộc lớp: [162; 168).

**Bài 8.**



Cho bảng phân bố ghép lớp:

| Các lớp của X | [7; 13) | [13; 19) | [19; 25) | [25; 31] | Tổng |
|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 5 | 10 | 20 | 15 | 50 |

Mệnh đề sai là mệnh đề:

**a)** Tần số của lớp [25; 31] là 15.

**b)** Tần suất của lớp [7; 13) là 0,1.

**c)** Bảng đã cho là bảng phân bố tần số ghép lớp.

**d)** Trên hình, đường gấp khúc PQRS là đường gấp khúc tần số (để mô tả bảng phân bố đã cho).

**Bài 9.** Cho bảng phân bố tần số rời rạc:

| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 15 | 10 | 6 | 7 | 43 |

Mốt của bảng phân bố đã cho là:

**a)** Số 2; **b)** Số 6; **c)** Số 3; **d)** Số 5.

**Bài 10.** Cho bảng phân bố tần số (rời rạc) :

Tuổi của 169 đoàn viên thanh niên.

| Tuổi $x_i$ | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 10 | 50 | 70 | 29 | 10 | 169 |

Số trung vị của bảng phân bố đã cho là:

**a)** Số 18; **b)** Số 20; **c)** Số 19; **d)** Số 21.

**Bài 11.** Cho dãy số liệu thống kê: 21, 23, 24, 25, 22, 20.

Số trung bình cộng của các số liệu thống kê bằng:

**a)** 23,5; **b)** 22; **c)** 22,5; **d)** 14.

**Bài 12.** Cho dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Phương sai của các số liệu thống kê đã cho là:

**a)** 1; **b)** 2; **c)** 3; **d)** 4.

**Bài 13.** Ba nhóm học sinh gồm 10 người, 15 người, 25 người. Khối lượng trung bình của mỗi nhóm lần lượt là: 50kg, 38kg, 40kg. Khối lượng trung bình của 3 nhóm học sinh là:

**a)** 41,4kg; **b)** 42,4kg; **c)** 26kg; **d)** 37kg.

## ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

| **Bài số** | Bài 7 | Bài 8 | Bài 9 | Bài 10 | Bài 11 | Bài 12 | Bài 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Đáp án** | d | d | c | b | c | d | a |

## HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Bài 7.** Số 168 thuộc lớp [168; 174). Vậy số 168 không thuộc lớp [162; 168).
Vậy mệnh đề đúng là d) .

**Bài 8.** * Từ bảng ta thấy tần số lớp [25; 31] là 15.

* Tần suất lớp [7; 13) là $\frac{5}{50} = 0{,}1$.

* Bảng đã cho là bảng phân bố tần số ghép lớp.

Vậy (a) , (b) , (c) là đúng nên (d) là sai.

**Bài 9.** Từ bảng đã cho ta thấy $x_2 = 3$ có tần số lớn nhất $n_2 = 15$.
Vậy $M_0 = 3 \Rightarrow$ đáp án đúng là c) .

**Bài 10.** Số trung vị của bảng phân bố tần số đã cho là:
$M_e = 20$. Vậy đáp án đúng là b) .

**Bài 11.** Số trung bình cộng của các số liệu đã cho là:

$$\overline{x} = \frac{1}{6}(21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 20) = 22{,}5$$

Vậy đáp án đúng là c) .

**Bài 12.** Phương sai của dãy số liệu đã cho là:

$$S_x^2 = \frac{1}{7}[(1-4)^2 + (2-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2 + (7-4)^2] = 4$$

Vậy đáp án đúng là d) .

**Bài 13.** $\overline{x} = \frac{1}{50}(10 \,.\, 50 + 15 \,.\, 38 + 25 \,.\, 40) = 41{,}4\text{kg}$

$\Rightarrow$ a) là đúng.

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 7.** Kết quả điều tra 50 hộ gia đình ở một phường về số phương tiện đi lại "Số phương tiện của mỗi hộ" như sau:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 4 | 3 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 |

**a)** Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất rời rạc (theo dấu hiệu được nghiên cứu).

**b)** Nêu nhận xét về tình hình phân bố của các số liệu thống kê đã cho (giá trị nào chiếm tỉ lệ cao nhất, thấp nhất, ...)

**c)** Tính số trung bình cộng, số trung vị, mốt của số liệu thống kê đã cho.

**Bài 8.** Cho hai bảng số liệu thống kê sau:

Chiều cao của nhóm nhà ở khu phố A (đơn vị: mét).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 29 | 24 | 34 | 28 | 20 | 50 |
| 25 | 31 | 22 | 35 | 28 | 27 | 52 |
| 27 | 35 | 21 | 41 | 47 | 27 | 60 |
| 26 | 36 | 40 | 46 | 47 | 47 | 20 |

Chiều cao của nhóm nhà ở khu phố B (đơn vị: mét).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 25 | 20 | 30 | 26 | 25 | 25 | 60 |
| 20 | 25 | 10 | 30 | 26 | 26 | 27 | 20 |
| 40 | 30 | 50 | 30 | 26 | 30 | 27 | |
| 16 | 30 | 40 | 40 | 10 | 20 | 26 | . |

**a)** Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của nhóm nhà khu phố A, với các lớp sau: [20; 30), [30; 40), [40; 50), [50; 60].

**b)** Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp theo nhóm nhà ở khu phố B, với các lớp sau: [10; 20), [20; 30), [30; 40), [40; 50), [50; 60].

**c)** Hãy tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê trong hai bảng số liệu đã cho.

**d)** Từ trên hãy xét xem nhóm nhà ở khu phố A hay khu phố B có chiều cao đồng đều hơn.

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 7.**

**a)** Bảng phân bố tần số và tần suất rời rạc (theo dấu hiệu được nghiên cứu).

| Số phương tiện $x_i$ | Tần số $n_i$ | Tần suất $f_i$(%) |
|---|---|---|
| 1 | 20 | 40 |
| 2 | 16 | 32 |
| 3 | 9 | 20 |
| 4 | 5 | 10 |
| Cộng | 50 | 100% |

**b)** – Số gia đình có số phương tiện là 1 chiếm tỉ lệ cao nhất: 40%.

– Số gia đình có số phương tiện là 4 chiếm tỉ lệ thấp nhất: 10%.

**c)** Số trung bình: $\overline{x} = \dfrac{1}{50}(1 . 20 + 2 . 16 + 3 . 9 + 4 . 5) = 1{,}9$.

Số trung vị: $M_e = \dfrac{2 + 3}{2} = 2{,}5$.

Mốt: $M_0 = 1$.

**Bài 8. a)** Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của nhóm nhà khu phố A (với các lớp đã cho)

| **Các lớp chiều cao X (mét)** | **Giá trị trung tâm $c_i$** | **Tần số $n_i$** | **Tần suất $f_i$(%)** |
|---|---|---|---|
| [20; 30) | 25 | 14 | 50 |
| [30; 40) | 35 | 5 | 17,9 |
| [40; 50) | 45 | 6 | 21,4 |
| [50; 60] | 55 | 3 | 10,7 |
| Cộng | | 28 | 100% |

**b)** Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của nhóm nhà khu phố B (với các lớp đã cho)

| **Các lớp chiều cao X (mét)** | **Giá trị trung tâm $c_i$** | **Tần số $n_i$** | **Tần suất $f_i$(%)** |
|---|---|---|---|
| [10; 20) | 15 | 3 | 10 |
| [20; 30) | 25 | 15 | 50 |
| [30; 40) | 35 | 6 | 20 |
| [40; 50) | 45 | 3 | 10 |
| [50; 60] | 55 | 3 | 10 |
| Cộng | | 30 | 100% |

**c)** * Gọi số trung bình cộng, phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê ở bảng câu a) lần lượt là $\overline{x}$, $S_x^2$, $S_x$ ta có:

$\overline{x} \approx 10,67$.

* Gọi số trung bình cộng, phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê ở bảng câu b) lần lượt là $\overline{y}$, $S_y^2$, $S_y$ ta có:

$\overline{y} = 31$; $S_y^2 = 124$; $S_y \approx 11,14$.

**d)** Từ câu c) ta thấy nhóm nhà ở khu phố A có chiều cao đồng đều hơn ($S_x < S_y$).

# CHƯƠNG VI

# GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

## §1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

### I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**1. Đơn vị đo góc và cung:**

* Độ

* Radian. Viết tắt (rad)

**2. Quan hệ giữa độ và radian:** $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad và 1 rad $= \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

**3. Bảng so sánh giữa độ và radian:** (Các góc cơ bản)

| Độ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $180^\circ$ | $270^\circ$ | $360^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Radian | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |

**4. Độ dài của một cung tròn:** $l = R \,.\, \alpha$.

**5. Đường tròn định hướng** là một đường tròn trên đó ta đã chọn, một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại là chiều âm.

**6. Đường tròn lượng giác** là đường tròn định hướng tâm O bán kính R = 1.

**7. Cung lượng giác** $\overset{\frown}{AB}$ với A, B là hai điểm trên đường tròn lượng giác là cung vạch bởi điểm M di chuyển trên đường tròn lượng giác theo một chiều nhất định từ A đến B.

**8. Số đo của một góc và cung lượng giác**

Sđ(Ox; Oy) = $a^\circ + k360^\circ$ ($k \in Z$) hay Sđ(Ox, Oy) = $\alpha + k2\pi$ ($k \in Z$)

Sđ($\overset{\frown}{AB}$) = $a^\circ + k360^\circ$ hay Sđ( $\overset{\frown}{AB}$ ) = $\alpha + k2\pi$ .

($0^\circ \le a^\circ < 360^\circ$, $0 \le \alpha < 2\pi$)

**9.Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác**

Cho A(0; 1) làm gốc, điểm cuối của cung $\overset{\frown}{AM}$ được xác định bởi:

Sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ hay Sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi$ , $k \in Z$.

### II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo khác nhau trên đường tròn lượng giác, có thể xảy ra trường hợp các điểm cuối của chúng trùng nhau không? Khi nào trường hợp này xảy ra?

### *Giải*

Khi biểu diễn hai cung lượng giác có số đo lần lượt là $\alpha$ và $\beta$ trên đường tròn lượng giác thì các điểm cuối của chúng có thể trùng nhau ($\alpha \neq \beta$). Và chúng trùng nhau khi: $\beta = \alpha + k2\pi$, ($k \in Z$) hoặc $\alpha = \beta + l2\pi$ ($l \in Z$) ($\alpha$, $\beta$ đo bằng radian).

**Bài 2.** Đổi số đo của các góc sau đây ra radian:

**a)** $18^\circ$ **b)** $57^0 80'$ **c)** $-25^\circ$ **d)** $-125^0 45'$

### *Giải*

**a)** Số đo bằng radian của góc $18^\circ$ là: $\dfrac{\pi . 18}{180} = \dfrac{\pi}{10}$ (rad).

**b)** Số đo bằng radian của góc $57^\circ 80'$ là:

$$\left(\frac{57,5 . \pi}{180}\right)(\text{rad}) = \frac{23\pi}{72}(\text{rad}).$$

**c)** Số đo bằng radian của góc có số đo $-25^\circ$ là:

$$\frac{\pi . (-25)}{180}(\text{rad}) = \frac{10\pi}{72}(\text{rad}) = \frac{5\pi}{36}(\text{rad}).$$

**d)** Số đo bằng radian của góc $-125^\circ 45'$ là:

$$\frac{-125,75 . \pi}{180}(\text{rad}) = \frac{503\pi}{720}(\text{rad}).$$

**Bài 3.** Đổi số đo của các cung sau đây ra độ, phút giây:

a) $\dfrac{\pi}{18}$ b) $\dfrac{3\pi}{16}$ c) $-2$ d) $\dfrac{3}{4}$

### *Giải*

**a)** Cung có số đo $\dfrac{\pi}{18}$ có số đo bằng độ là:

$$\left(\frac{\pi}{18} . \frac{180}{\pi}\right)^o = \left(\frac{180}{18}\right)^o = 10^\circ$$

**b)** Cung có số đo $\dfrac{3\pi}{16}$ có số đo bằng độ là:

$$\left(\frac{3\pi}{16} . \frac{180}{\pi}\right)^o = (33.75)^\circ = 33^\circ 45'.$$

**c)** Cung có số đo $-2$ có số đo bằng độ là: $\left(-2 . \dfrac{180}{\pi}\right)^o \approx -114^\circ\, 38'\, 58''$.

**d)** Số đo bằng độ của cung $\dfrac{3}{4}$ là: $\left(\dfrac{3}{4} . \dfrac{180}{\pi}\right)^o \approx 42^\circ\, 59'\, 37''$.

**Bài 4.** Một đường tròn có bán kính 20 cm. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo

**a)** $\dfrac{\pi}{15}$ **b)** 1,5 **c)** $37^\circ$

### *Giải*

**a)** Cung có số đo $\frac{\pi}{15}$ có độ dài $l$ bằng $20 . \frac{\pi}{15}$(cm) = $\frac{20\pi}{15}$(cm) $\simeq$ 4.19(cm).

**b)** Độ dài của cung có số đo 1,5 (rad) là $l = 1,5 \;.\; 20 = 30$(cm).

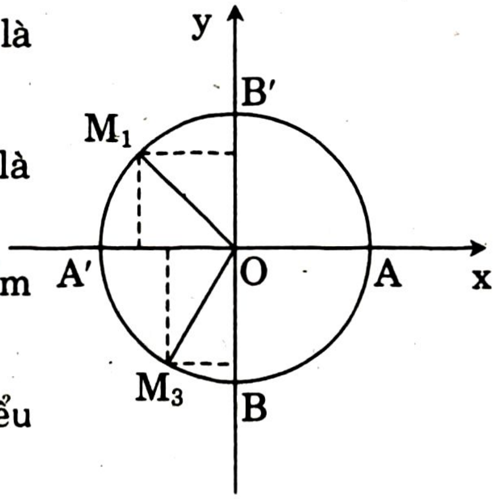
**c)** Cung có số đo 37° có số đo bằng (rad) là $\alpha = \frac{37 . \pi}{360}$(rad)

Vậy độ dài của cung này là $l = 20 . \frac{37 . \pi}{360} \simeq 6,45$ (cm).

**Bài 5.** Trên đường tròn lượng giác hãy biểu diễn các cung có số đo:

**a)** $-\frac{5\pi}{4}$ **b)** 135° **c)** $\frac{10\pi}{3}$ **d)** –225°

### *Giải*



**a)** $-\frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 2\pi$ điểm cần biểu diễn là điểm $M_1$ (trên đường tròn lượng giác).

**b)** 135° = 90° + 45° điểm cần biểu diễn là điểm $M_2$ .

**c)** $\frac{10\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3} + \pi + 2\pi$ điểm cần biểu diễn là điểm $M_3$ .

**d)** –225° = 135° – 360° điểm cần biểu diễn là điểm $M_4$ .

(*Chú ý:* $M_3 \equiv M_4$ và $M_1 \equiv M_2$)

**Bài 6.** Trên đường tròn lượng giác, xác định điểm khác M biết rằng $\overset{\frown}{AM}$ có số đo tương ứng là:

**a)** $k\pi$ **b)** $k\frac{\pi}{2}$ **c)** $k\frac{\pi}{3}$ $(k \in Z)$

### *Giải*

**a)** Với cung có số đo $k\pi$ ta xác định được hai điểm cần tìm là A và A' (tương ứng với $k = 2m$ và $k = 2m + 1$, $m \in Z$).

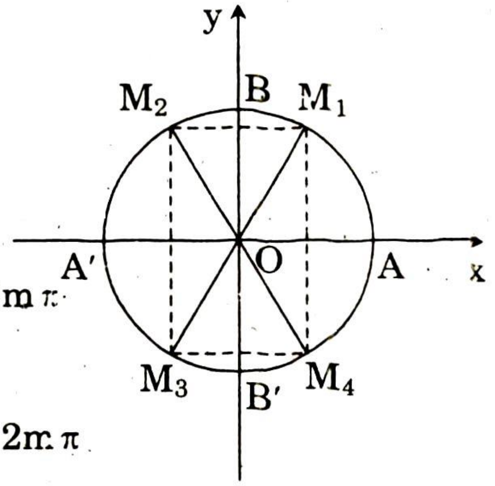
**b)** Xét cung $k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$

* Khi $k = 4m$ ta có $k\frac{\pi}{2} = 4m\pi \Rightarrow$ điểm cuối là A

* Khi $k = 4m + 1$ ta có $k\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \Rightarrow$ điểm cuối là B

* Khi $k = 4m + 2$ ta có $k\frac{\pi}{2} = \pi + 2m\pi \Rightarrow$ điểm cuối là A'

* Khi $k = 4m + 3$ ta có $k\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2m\pi \Rightarrow$ điểm cuối là B' ($m \in Z$)



**c)** Xét cung $k\frac{\pi}{3}$

* Khi $k = 6m$ ta có $k\frac{\pi}{3} = 2m\pi$

⇒ điểm cuối là A.

* Khi $k = 6m + 1$ ta có $k\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2m\pi$

⇒ điểm cuối là $M_1$.

* Khi $k = 6m + 2$ ta có $k\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2m\pi$

⇒ điểm cuối là $M_2$

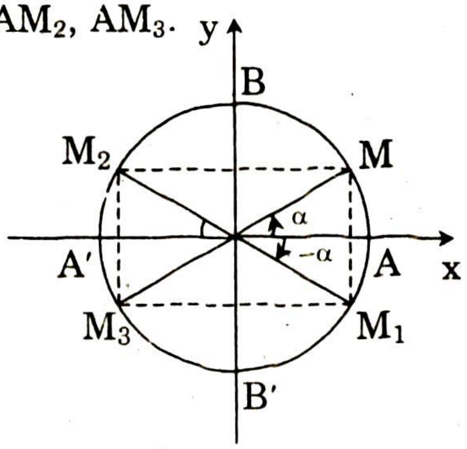
* Khi $k = 6m + 3$ ta có $k\frac{\pi}{3} = \pi + m2\pi \Rightarrow$ điểm cuối là A'

* Khi $k = 6m + 4$ ta có $k\frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + m2\pi \Rightarrow$ điểm cuối là $M_3$

* Khi $k = 6m + 5$ ta có $k\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + m2\pi \Rightarrow$ điểm cuối là $M_4$

**Bài 7.** Trên đường tròn lượng giác cho điểm M xác định bởi sđ $\overset{\frown}{AM}$ bằng $\alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

Gọi $M_1$, $M_2$, $M_3$ lần lượt là điểm đối xứng của M qua Ox, trục Oy và gốc tọa độ. Tìm số đo của các cung $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$, $\overset{\frown}{AM_3}$.



### *Giải*

Ta có:

Sđ $\overset{\frown}{AM_1} = -\alpha + k2\pi$ ($k \in Z$)

Sđ $\overset{\frown}{AM_2} = \pi - \alpha + k2\pi$ ($k \in Z$)

Sđ $\overset{\frown}{AM_3} = \pi + \alpha + k2\pi$ ($k \in Z$)

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 8.** Đổi số đo của các góc sau ra radian

**a)** 22°30' **b)** 45°30' **c)** −15° **d)** −18°30'

**Bài 9.** Đổi số đo của các cung sau ra đơn vị độ, phút, giây

**a)** $\frac{\pi}{8}$ **b)** $-\frac{3\pi}{8}$ **c)** 4 **d)** −1

**Bài 10.** Cho đường tròn có bán kính R = 10 cm. Tìm độ dài các cung trên đường tròn có số đo:

**a)** $\frac{3}{2}$ **b)** 2,5 **c)** 45°

**Bài 11.** Trên đường tròn lượng giác hãy biểu diễn các cung có số đo sau.

**a)** $-60^\circ$ **b)** $-315^\circ$ **c)** $\frac{3\pi}{4}$ **d)** $-\frac{5\pi}{4}$ **e)** $\frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in Z)$.

**Bài 12.** Biểu diễn các góc lượng giác, có số đo sau dưới dạng một công thức tổng quát: $x_1 = k\pi$ và $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in Z)$

**Bài 13.** Xác định điểm cuối của cung lượng giác a biết $\cos a \geq +\frac{1}{2}$.

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN

**Bài 8.**

**a)** Số đo bằng radian của góc $22^\circ30'$ là: $22{,}5.\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{8}(\text{rad})$.

**b)** Số đo bằng radian của góc $45^\circ30'$ là: $45{,}5.\frac{\pi}{180} = \frac{455\pi}{1800} = \frac{91\pi}{360}(\text{rad})$

**c)** Số đo bằng radian của góc $-15^\circ$ là: $-15.\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{12}(\text{rad})$.

**d)** Số đo bằng radian của góc $-18^\circ30'$ là: $18{,}5.\frac{\pi}{180} = \frac{185\pi}{1800} = \frac{37\pi}{360}(\text{rad})$

**Bài 9.**

**a)** Cung có số đo $\frac{\pi}{8}$ có số đo bằng độ là: $\left(\frac{\pi}{8}.\frac{180}{\pi}\right)^\circ = (22{,}5)^\circ = 22^\circ30'$.

**b)** Cung có số đo $-\frac{3\pi}{8}$ có số đo bằng độ là: $\left(-\frac{3\pi}{8}.\frac{180}{\pi}\right)^\circ = (67{,}5)^\circ = -67^\circ30'$.

**c)** Cung có số đo 4 có số đo bằng độ là: $\left(4.\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 229^\circ17'58''$.

**d)** Cung có số đo $-1$ có số đo bằng độ là: $\left(-1.\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx -57^\circ19'29''$.

**Bài 10.**

**a)** Độ dài của cung có số đo $\frac{2}{3}$ (rad) là: $l = 10.\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$ (cm)

**b)** Độ dài của cung có số đo 2,5 (rad) là: $l = 10.2{,}5 = 25$ (cm)

**c)** Độ dài của cung có số đo 45° là: $l = 10.\frac{\pi}{4} = 7{,}85$ (cm)

**Bài 11.** Ta xác định điểm M thỏa mãn Sđ $\overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha$ với các cung sau.

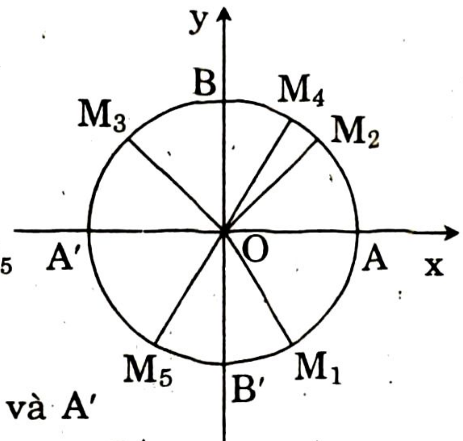
**a)** Cung có số đo $-60^\circ$ cho ta điểm $M_1$ trên đường tròn lượng giác

**b)** $-315^\circ = 45^\circ - 360^\circ$ cho ta điểm $M_2$

**c)** $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$ cho ta điểm $M_3$

**d)** $-\frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 2\pi$ cho ta điểm $M_3$

**e)** $\frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in Z)$ cho ta hai điểm $M_4$, $M_5$



**Bài 12.**

* Điểm ngọn của cung $x_1 = k\pi$ là điểm A và A'

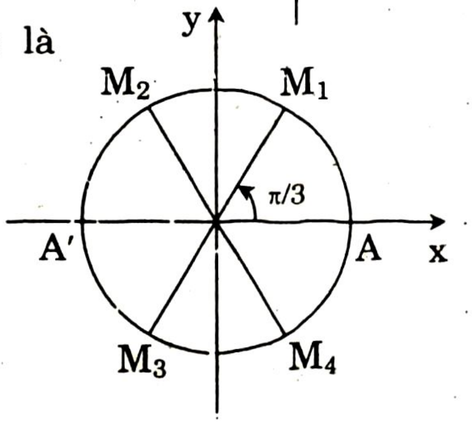
* Điểm ngọn của cung $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ là

$M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$

Trên đường tròn lượng giác ta nhận thấy có 6 điểm ngọn của 6 cung phân biệt.

Do đó công thức tổng quát là:

$x = k\frac{2\pi}{6} = k\frac{\pi}{3}$ $(k \in Z)$



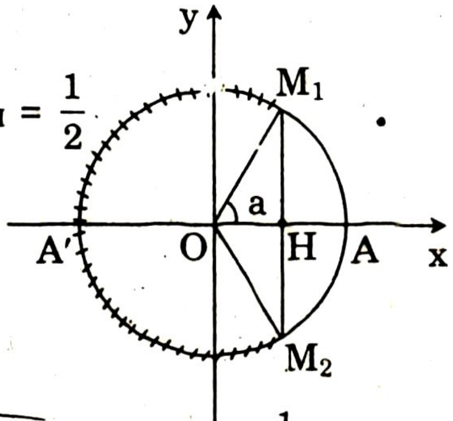
**Bài 13.**

Trên trục hoành ta lấy điểm H sao cho $x_H = \frac{1}{2}$

Kẻ $M_1M_2$ // Oy ($M_1M_2$ qua H, $I_1$ và $I_2$ nằm trên đường tròn lượng giác)

Dễ thấy $-60^\circ + k360^\circ \le a \le 60^\circ + k360^\circ$

Vậy $\cos a \ge \frac{1}{2}$



$\Rightarrow$ Nếu điểm cuối của cung a thuộc $\overset{\frown}{M_1AM_2}$ thì $\cos a \ge \frac{1}{2}$ (tính cả điểm $M_1$ và $M_2$).

# §2. CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Giá trị lượng giác của cung α

**a)** *Định nghĩa:*

Trên đường tròn lượng giác cho cung $\overset{\curvearrowright}{AM}$ có Sđ $\overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha$.

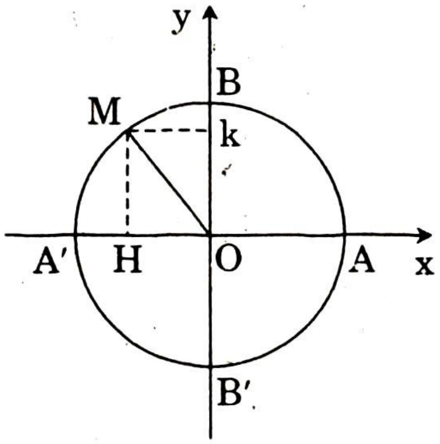
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên Ox và Oy khi đó ta có:

* $\sin\alpha = \overline{OK}$.

* $\cos\alpha = \overline{OH}$.

* Nếu $\cos\alpha \neq 0$ thì $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

* Nếu $\sin\alpha \neq 0$ thì $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.



**b)** *Hệ quả:* $\forall\alpha \in R$ ta có

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha,\ \forall k \in Z.$$
$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha,\ \forall k \in Z.$$
$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1;\ -1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

**c)** *Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt*

| α | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sinα | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| cosα | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tanα | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | \|\| |
| cotα | \|\| | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |

### 2. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác:

**a)** *Các hệ thức lượng cơ bản:*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z.$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha \neq k\pi,\ k \in Z.$$

$$\tan\alpha.\cot\alpha = 1,\ \alpha \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in Z.$$

**b)** *Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt*

* Cung đối nhau: $\alpha$ và $(-\alpha)$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$; $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$.

* Cung bù nhau: $\alpha$ và $\pi - \alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ ; $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$;

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ ; $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$;

* Cung hơn kém $\pi$ : $\alpha$ và $\pi + \alpha$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ ; $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$;

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ ; $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$;

* Cung phụ nhau: $\alpha$ và $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha;\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha;\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha;$$

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Có cung $\alpha$ nào mà $\sin\alpha$ nhận các giá trị tương ứng sau đây không?

**a)** $-0.7$; **b)** $\frac{4}{3}$; **c)** $-\sqrt{2}$; **d)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

### *Giải*

**a)** $-1 < -0,7 < 0$ vậy tồn tại cung $\alpha$ sao cho $\sin\alpha = -0,7$

**b)** Ta có $\frac{4}{3} > 1$ vậy không tồn tại cung $\alpha$ sao cho $\sin\alpha = \frac{4}{3}$

**c)** Tương tự b) không tồn tại (do $-\sqrt{2} < -1$)

**d)** Do $\sqrt{5} > \sqrt{4}$ nên $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1 \Rightarrow$ không tồn tại cung $\alpha$ sao cho $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

**Bài 2.** Các đẳng thức sau đây có thể đồng thời xảy ra không?

**a)** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ và $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **b)** $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

**c)** $\sin\alpha = 0,7$ và $\cos\alpha = 0,3$

### *Giải*

**a)** Khi $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ và $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

thì $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \neq 1.$

Vậy hai đẳng thức đã cho không đồng thời xảy ra.

**b)** Khi $\begin{cases} \sin\alpha = -\frac{4}{5} \\ \cos\alpha = -\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1.$

Vậy hai đẳng thức đã cho đồng thời xảy ra.

**c)** Khi $\sin\alpha = 0,7$ và $\cos\alpha = 0,3 \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (0,7)^2 + (0,3)^2 \neq 1.$

Vậy hai đẳng thức đã cho không đồng thời xảy ra.

**Bài 3.** Cho $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ xác định dấu các giá trị lượng giác sau:

**a)** $\sin(\alpha - \pi)$ **b)** $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ **c)** $\tan(\alpha + \pi)$ **d)** $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

### *Giải*

**a)** Ta có: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi < \alpha - \pi < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\alpha - \pi) < 0$

**b)** Ta có: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < -\alpha < 0 \Rightarrow \pi < \frac{3\pi}{2} - \alpha < \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$

**c)** Ta có: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi < \alpha + \pi < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \tan(\alpha + \pi) > 0$

**d)** Ta có: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{2} < \pi \Rightarrow \cot(\alpha + \frac{\pi}{2}) < 0$

**Bài 4.** Tính giá trị lượng giác của góc α, nếu:

**a)** $\cos\alpha = \frac{4}{13}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; **b)** $\sin\alpha = -0,7$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

**c)** $\tan\alpha = -\frac{15}{7}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; **d)** $\cot\alpha = -3$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

### *Giải*

**a)** Áp dụng công thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{13}\right)^2 = 1 - \frac{16}{169} = \frac{153}{169}.$

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{153}}{13}$.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{153}}{13} : \frac{4}{13} = \frac{\sqrt{153}}{13} . \frac{13}{4} = \frac{\sqrt{153}}{4}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{4}{\sqrt{153}}$$

**b)** Áp dụng công thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - (0,7)^2 = 0,51$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{0,51}$ (do $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ nên $\cos\alpha < 0$)

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-0,7}{-\sqrt{0,51}} = \frac{0,7}{\sqrt{0,51}}$$

$$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{0,51}}{0,7}$$

**c)** Áp dụng công thức $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \left(-\frac{15}{7}\right)^2 = \frac{274}{49}$$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{49}{274} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-7}{\sqrt{274}}$ (do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0$)

$$\Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha.\tan\alpha = \frac{-7}{\sqrt{274}}.\left(-\frac{15}{7}\right) = \frac{15}{\sqrt{147}},\ \cot\alpha = -\frac{7}{5}.$$

**d)** Áp dụng công thức $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + (-3)^2 = 10$

$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{10}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{-1}{\sqrt{10}}$ (vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\sin\alpha < 0$)

$$\cos\alpha = \sin\alpha.\cot\alpha = \frac{-1}{\sqrt{10}}.(-3) = \frac{3}{\sqrt{10}},\ \tan\alpha = -\frac{1}{3}$$

**Bài 15.** Tính $\alpha$, biết:

**a)** $\cos\alpha = 1$; **b)** $\cos\alpha = -1$; **c)** $\cos\alpha = 0$; **d)** $\sin\alpha = 1$;

**e)** $\sin\alpha = -1$; **f)** $\sin\alpha = 0$.

### *Giải*

**a)** $\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = k2\pi \ (k \in Z)$

**b)** $\cos\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \pi + k2\pi \ (k \in Z)$

**c)** $\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$

**d)** $\sin\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in Z)$

**e)** $\sin\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \ (k \in Z)$

**f)** $\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi \ (k \in Z)$

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 6.**

**a)** Cho $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, tính $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$

**b)** Cho $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ và $\cot\alpha$

**Bài 7.** Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2\sin 50^\circ \cos(-188^\circ)}{2\cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$

**Bài 8.** Cho $x + y + z = \pi$. Chứng minh rằng:

**a)** $\sin(x + y) = \sin z$;

**b)** $\cos(x + y) = -\cos z$;

**c)** $\sin\left(\frac{x + y}{2}\right) = \cos\frac{z}{2}$;

**d)** $\cos\left(\frac{x + y}{2}\right) = \sin\frac{z}{2}$.

**Bài 9.** Cho 3 số thực $x, y, z > 0$ thỏa: $x + y + z = \pi$. Chứng minh rằng nếu: $-\cos^2 z - \cos(x + y).\cos(x - y) - \frac{1}{4} = 0$ thì $x = y = z$.

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN

**Bài 6.**

**a)** * $\tan\alpha = \frac{4}{3}$; * $\cot\alpha = \frac{3}{4}$

**b)** * $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$; * $\cot\alpha = \frac{4}{3}$

**Bài 7.** A= 0.

**Bài 8.**

**a)** $\sin(x + y) = \sin(\pi - z) = \sin z$

**b)** $\cos(x + y) = \cos(\pi - z) = -\cos z$

**c)** $\sin\left(\dfrac{x + y}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{z}{2}\right) = \cos\dfrac{z}{2}$

**d)** $\cos\left(\dfrac{x + y}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{z}{2}\right) = \sin\dfrac{z}{2}$

**Bài 9.** $-\cos^2 z - \cos(x + y).\cos(x - y) - \dfrac{1}{4} = 0$

$$\Leftrightarrow [2\cos z - \cos(x - y)]^2 + \sin^2(x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos z - \cos(x - y) = 0 \\ \sin(x - y) = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow x = y = z = \frac{\pi}{3}.$$

# §3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Công thức cộng

* $\cos(a - b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

* $\cos(a + b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$

* $\sin(a - b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$

* $\sin(a + b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$

* $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$

* $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$

### 2. Công thức nhân đôi

* $\sin 2a = 2\sin a.\cos a$ * $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ * $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

### 3. Công thức hạ bậc

* $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$ * $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$ * $\tan^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$

### 4. Công thức biến đổi tích thành tổng

* $\cos a.\cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$

* $\sin a.\sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

* $\sin a.\cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a - b) + \sin(a + b)]$

### 5. Công thức biến đổi tổng thành tích

* $\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}.\cos\frac{u-v}{2}$

* $\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}.\sin\frac{u-v}{2}$

* $\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}.\cos\frac{u-v}{2}$

* $\sin u - \sin v = 2\cos\frac{u+v}{2}.\sin\frac{u-v}{2}$

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Tính:

**a)** $\cos225^\circ$; $\sin240^\circ$; $\cot(-15^\circ)$; $\tan75^\circ$ **b)** $\sin\frac{7\pi}{12}$; $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$; $\tan\frac{13\pi}{12}$

### *Giải*

**a)** * $\cos225^\circ = \cos(270^\circ - 45^\circ) = \cos(180^\circ + 90^\circ - 45^\circ)$

$= -\cos(90^\circ - 45^\circ) = -\sin45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

* $\sin240^\circ = \sin(180^\circ + 90^\circ - 30^\circ) = -\sin(90^\circ - 30^\circ)$

$= -\cos30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

*$\cot(-15^\circ) = -\cot15^\circ = -\cot(45^\circ - 30^\circ) = \frac{-1}{\tan(45^\circ - 30^\circ)}$

$$= -\frac{1 + \tan45^\circ\tan30^\circ}{\tan45^\circ - \tan30^\circ} = -\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{-1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2} = -\frac{4+2\sqrt{3}}{2} = -2-\sqrt{3}$$

* $\tan75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan45^\circ + \tan30^\circ}{1 - \tan45^\circ.\tan30^\circ}$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2}$$

**b)** * $\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$* \cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$* \tan\frac{13\pi}{12} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}.\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

**Bài 2.** Tính:

**a)** $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, biết $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

**b)** $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

**c)** $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$ biết $\sin a = \frac{4}{5}$, $0^\circ < a < 90^\circ$,

$\sin b = \frac{2}{3}$ và $90^\circ < b < 180^\circ$.

### *Giải*

**a)** Ta có $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}}$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ (do } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \cos\alpha > 0)$$

Vậy $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\alpha.\cos\frac{\pi}{3} - \sin\alpha.\sin\frac{\pi}{3}$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}.\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2}$$

**b)** Áp dụng: $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = -2\sqrt{2} \text{ (do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ nên } \tan\alpha < 0).$$

$$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha.\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{-2\sqrt{2}-1}{1-2\sqrt{2}}=\frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}=\frac{\left(1+2\sqrt{2}\right)^2}{7}=\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$$

**c)** * Do $0^\circ < a < 90^\circ \Rightarrow \cos a=\sqrt{1-\sin^2 a}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$.

* Do $90^\circ < b < 180^\circ \Rightarrow \cos b=\sqrt{1-\sin^2 b}=-\sqrt{1-\frac{4}{9}}=-\sqrt{\frac{5}{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

* Vậy ta có:

$\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b=\frac{3}{5}.\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)-\frac{4}{5}.\frac{2}{3}=-\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{8}{15}$.

$\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b=\left(\frac{4}{5}\right).\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)-\left(\frac{3}{5}\right).\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3\sqrt{5}}-\frac{2}{5}$

**Bài 3.** Rút gọn các biểu thức sau:

**a)** $\sin(a+b)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right).\sin(-b)$

**b)** $\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)+\frac{1}{2}\sin^2 a$

**c)** $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}-b\right)-\sin(a-b)$

### *Giải*

**a)** $\sin(a+b)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right).\sin(-b)$

$= \sin a.\cos b+\cos a.\sin b+\cos a(\sin -b)$

$= \sin a.\cos b+\cos a.\sin b-\cos a.\sin b=\sin a.\cos b$

**b)** $\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)+\frac{1}{2}\sin^2 a$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+a-\frac{\pi}{4}+a\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+a+\frac{\pi}{4}-a\right)\right]+\frac{1}{2}.\sin^2 a$$

$$=\frac{1}{2}\cos 2a+\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}.\sin^2 a=\frac{1}{2}(1-2\sin^2 a)+\frac{1}{2}\sin^2 a$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin^2 a = \frac{\cos^2 a}{2}$$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) - \sin(a - b)$

$$= \sin a.\cos b - (\sin a.\cos b - \cos a.\sin b) = \cos a.\sin b$$

**Bài 4.** Chứng minh các đẳng thức:

a) $\dfrac{\cos(a - b)}{\cos(a + b)} = \dfrac{\cot a.\cot b + 1}{\cot a.\cot b - 1}$

b) $\sin(a + b)\sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a;$

c) $\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a.$

### *Giải*

a) Ta có VT $= \dfrac{\cos(a - b)}{\cos(a + b)} = \dfrac{\cos a\cos b + \sin a\sin b}{\cos a\cos b - \sin a\sin b}$

$$= \frac{\dfrac{\cos a.\cos b}{\sin a.\sin b} + 1}{\dfrac{\cos a.\cos b}{\sin a.\sin b} - 1} = \frac{\cot a\cot b + 1}{\cot a\cot b - 1} = VP$$

b) Ta có: $\sin(a + b).\sin(a - b)$

$= \lfloor(\sin a\cos b + \cos a\sin b)(\sin a\cos b - \cos a\sin b)\rfloor$

$= \sin^2 a\cos^2 b - \cos^2 a\sin^2 a = \sin^2 a(1 - \sin^2 b) - (1 - \sin^2 a)$

$= \sin^2 a - \sin^2 b = (1 - \cos^2 a) - (1 - \cos^2 a)$

$= \cos^2 b - \cos^2 a$ (đpcm).

c) Ta có: $\cos(a + b)\cos(a - b)$

$= (\cos a.\cos b - \sin a.\sin b)(\cos a.\cos b + \sin a.\sin b)$

$= \cos^2 a\cos^2 b - \sin^2 a\sin^2 b =$

$= \cos^2 a(1 - \sin^2 b) - \sin^2 b(1 - \cos^2 a) = \cos^2 a - \sin^2 b$

$= (1 - \sin^2 a) - (1 - \cos^2 b) = \cos^2 b - \sin^2 a$ (đpcm)

**Bài 5.** Tính sin2a, cos2a, tan2a biết:

a) $\sin a = -0{,}6$ và $\pi < a < \dfrac{3\pi}{2}$  b) $\cos a = -\dfrac{5}{13}$ và $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$

c) $\sin a + \cos a = \dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{3\pi}{4} < a < \pi$

### *Giải*

a) Do $\sin a = -0{,}6$, $\pi < a < \dfrac{3\pi}{2}$ nên ta có:

$$\cos a = -\sqrt{1-\sin^2 a} = -\sqrt{1-(-0,6)^2} = -\sqrt{1-0,36}$$

$$= -\sqrt{0,64} = -0,8 \text{ và } \tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{-0,6}{-0,8} = \frac{3}{4}$$

Vậy ta có:

* $\sin 2a = 2\sin a\cos a = 2.(-0,6).(-0,8) = 0,96$

* $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 1 - 2.(0,6)^2 = 0,28$

* $\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{0,96}{0,28} = \frac{96}{28} = \frac{24}{7}$

**b)** Do $\cos a = -\frac{5}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên

$$\sin a = \sqrt{1-\sin^2 a} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

và $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{12}{13}:\left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13}.\left(-\frac{13}{5}\right) = -\frac{12}{5}$

Vậy ta có:

* $\sin 2a = 2\sin a\cos a = 2.\frac{12}{13}.\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{120}{169}$

* $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 1 - 2.\left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{288}{169} = -\frac{119}{169}$

* $\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \left(-\frac{120}{169}\right):\left(-\frac{119}{169}\right) = \frac{120}{119}$

**c)** Do $\sin a + \cos b = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin a + \cos a)^2 = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \sin^2 a + \sin 2a + \cos^2 a = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2a = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$$

Từ $\frac{3\pi}{4} < a < \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{4} < 2a < 2\pi$

$$\Rightarrow \cos 2a = \sqrt{1-\sin^2 2a} = \sqrt{1-\frac{9}{10}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

* $\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \left(-\frac{3}{4}\right):\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{7}}$

**Bài 6.** Cho $\sin 2a = -\frac{5}{9}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính sina và cosa

### ***Giải***

Do $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\begin{cases} \sin a > 0 \\ \cos a < 0 \end{cases}$ (*)

Ta có: $\begin{cases} \sin 2a = -\dfrac{5}{9} \\ \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin a.\cos a = -\dfrac{5}{9} \\ (\sin a + \cos a)^2 - 2\sin a.\cos a = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin a.\cos a = -\dfrac{5}{18} \\ (\sin a + \cos a)^2 = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ hoặc (I) $\begin{cases} \sin a.\cos a = -\dfrac{5}{18} \\ \sin a + \cos a = \dfrac{4}{9} \end{cases}$ hoặc (II) $\begin{cases} \sin a.\cos a = -\dfrac{5}{18} \\ \sin a + \cos a = -\dfrac{4}{9} \end{cases}$

Giải (I): Từ hệ ta có: sina và cosa là nghiệm phương trình:

$$t^2 - \frac{4}{9}t - \frac{5}{18} = 0 \Leftrightarrow 18t^2 - 8t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{4 + \sqrt{106}}{18} \\ t = \dfrac{4 - \sqrt{106}}{18} \end{array}\right.$$

do (*) nên: $\sin a = \dfrac{4 + \sqrt{106}}{18}$ và $\cos a = \dfrac{4 - \sqrt{106}}{18}$

Giải (II): Từ hệ suy ra sina và cosa là nghiệm phương trình:

$$t^2 + \frac{4}{9}t - \frac{5}{18} = 0 \Leftrightarrow 18t^2 + 8t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-4 - \sqrt{106}}{18} \\ t = \dfrac{-4 + \sqrt{106}}{18} \end{array}\right.$$

do (*) nên: $\left[\begin{array}{l} \sin a = \dfrac{-4 + \sqrt{106}}{18} \\ \cos a = \dfrac{-4 - \sqrt{106}}{18} \end{array}\right.$

**Bài 7.** Biến đổi thành tích biểu thức sau:

**a)** $1 - \sin x$ **b)** $1 + \sin x$ **c)** $1 + 2\cos x$ **d)** $1 - 2\sin x$.

## *Giải*

**a)** Ta có: $1 - \sin x = \sin\dfrac{\pi}{2} - \sin x = 2\cos\left(\dfrac{\dfrac{\pi}{2} + x}{2}\right).\sin\left(\dfrac{\dfrac{\pi}{2} - x}{2}\right)$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

**b)** Ta có: $1 + \sin x = \sin\dfrac{\pi}{2} + \sin x = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right).\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$

c) $1 + 2\cos x = 2\left(\frac{1}{2} + \cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\right)$

$$= 4\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + x}{2}\right).\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} - x}{2}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right).$$

d) $1 - 2\sin x = 2\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{6} - \sin x\right)$

$$= 2.2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6} + x}{2}\right).\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6} - x}{2}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right).\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right)$$

**Bài 8.** Rút gọn biểu thức: $A = \dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$

### *Giải*

Ta có: $A = \dfrac{(\sin x + \sin 5x) + \sin 3x}{(\cos x + \cos 5x) + \cos 3x} = \dfrac{2\sin\frac{x + 5x}{2}.\cos\frac{x - 5x}{2} + \sin 3x}{2\cos\frac{x + 5x}{2}.\cos\frac{x - 5x}{2} + \cos 3x}$

$$= \frac{\sin 3x(2\cos 2x + 1)}{\cos 3x(2\cos 2x + 1)} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \tan 3x$$

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 9. a)** Biết $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$

**b)** Biết $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = m$ với $m \neq -1$ tính $\tan\alpha$

**Bài 10. a)** Cho $\cos a = \frac{1}{4}$, $\cos b = \frac{1}{5}$. Tính $\cos(a + b)\cos(a - b)$

**b)** Cho $a - b = \frac{\pi}{6}$, tính $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2$

**Bài 11.** Chứng minh rằng:

**a)** $\cos 4a = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

**b)** $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{35}{64} + \frac{7}{16}\cos 4x + \frac{1}{64}\cos 8x$

**Bài 12*.** Tính $\sin 18^\circ$, $\cos 18^\circ$

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN

**Bài 9. a)** $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{-3 + 4\sqrt{3}}$

**b)** $\tan\alpha = \frac{m}{m+1}$ $(m \neq -1)$

**Bài 10. a)** Ta có: $\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 1 = \frac{-359}{400}$

**b)** Ta có: $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2$

$$= 2 + 2\cos(a - b) = 2 + 2\cos\frac{\pi}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

**Bài 11. a)** Ta có: $\cos 4x = 2\cos^2 .2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1$

$$= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \text{ (đpcm)}$$

**b)** Ta có:

$\sin^8 x + \cos^8 x$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^4 - 4\sin^2 x.\cos^2 x(\sin^4 x + \cos^4 x) - 6\sin^4 x.\cos^4 x$$

$$= 1 - 2\sin^2 2x.\left(1 - \frac{\sin^2 2x}{2}\right) - \frac{6}{16}\sin^4 2x$$

$$= \frac{35}{64} + \frac{7}{16}\cos 4x + \frac{1}{64}\cos 8x \text{ (đpcm)}.$$

**Bài 13. a)** $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

**b)** Từ $\sin^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{5+1}}{4}$.

# ÔN TẬP CHƯƠNG VI

## I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Góc và cung lượng giác

**a)** Đơn vị đo góc và cung (Độ và radian)

- * Quan hệ giữa độ và radian
- * Độ dài của một cung tròn

**b)** Đường tròn lượng giác

- * Đường tròn định hướng
- * Cung lượng giác
- * Góc lượng giác
- * Đường tròn lượng giác

**c)** Số đo của cung và góc lượng giác (số đo của cung, góc lượng giác, biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác)

## 2. Giá trị lượng giác của một cung

**a)** Giá trị lượng giác của cung $\alpha$ (các định nghĩa hệ quả, giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt)

**b)** Ý nghĩa hình học của $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$

**c)** Quan hệ giữa các giá trị lượng giác

* Các hệ thức lượng giác cơ bản

* Các giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt (cung đối nhau, bù nhau, phụ nhau...)

## 3. Công thức lượng giác

**a)** Công thức cộng

**b)** Công thức nhân đôi

**c)** Công thức hạ bậc

**d)** Công thức biến đổi tích thành tổng, tổng thành tích

## II. BÀI TẬP CĂN BẢN

**Bài 1.** Hãy nêu định nghĩa của $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ và giải thích vì sao ta có:

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha \; ; \; k \in Z$$

$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha \; ; \; k \in Z$$

### *Hướng dẫn*

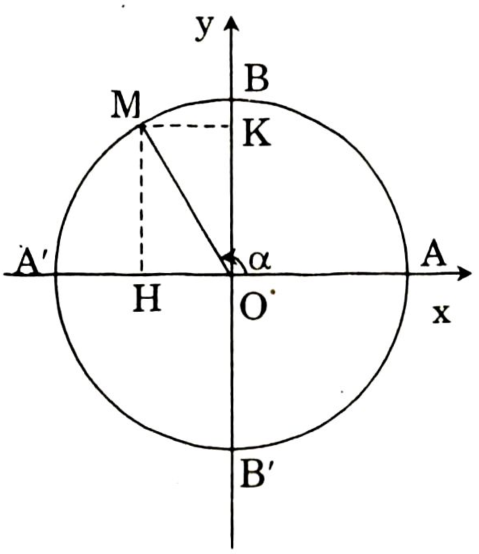
Trên đường tròn lượng giác cho AM với Sđ $\overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha$

* Ta có tung độ $y = \overline{Ok}$ của điểm M gọi là sin của $\alpha$: $\sin\alpha = \overline{Ok}$

* Hoành độ $x = \overline{OH}$ của điểm M gọi là cosin của $\alpha$: $\cos\alpha = \overline{OH}$

* Ta đã biết Sđ $\overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha$ hay Sđ $\overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha + k2\pi$, $k \in Z$ cho ta duy nhất một điểm M trên đường tròn lượng giác như vậy theo định nghĩa trên ta có: $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$ $(k \in Z)$

$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$ $(k \in Z)$.



**Bài 2.** Nêu định nghĩa của $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ và giải thích vì sao ta có:

$$\tan(\alpha + k2\pi) = \tan\alpha \; , \; k \in Z$$

$$\cot(\alpha + k2\pi) = \cot\alpha \; , \; k \in Z$$

***Hướng dẫn:*** (Tương tự bài 1)

**Bài 3.** Tính:

**a)** $\sin\alpha$, nếu $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

**b)** $\cos\alpha$, nếu $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

**c)** $\tan\alpha$, nếu $\sin\alpha = -\dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

**d)** $\cot\alpha$, nếu $\cos\alpha = -\dfrac{1}{4}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

### *Giải*

**a)** Áp dụng công thức: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \text{ do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

**b)** Áp dụng: $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+8} = \frac{1}{9}, \text{ do } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{3}$$

**c)** Áp dụng công thức: $1 + \cot\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 = \frac{1}{\frac{4}{9}} - 1 = \frac{5}{4}$$

do $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \cot\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \tan\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

**d)** Áp dụng công thức: $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{16}} - 1 = 15,$$

do $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \tan\alpha = -\sqrt{15} \Rightarrow \cot\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

**Bài 4.** Rút gọn các biểu thức sau:

**a)** $\dfrac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$;  **b)** $\tan\alpha\left(\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)$;

**c)** $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$;  **d)** $\dfrac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha}$.

### *Giải*

**a)** Ta có: $\dfrac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \dfrac{2\sin 2\alpha - 2\sin 2\alpha.\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha + 2\sin 2\alpha.\cos 2\alpha}$

$$= \frac{2\sin 2\alpha.(1-\cos 2\alpha)}{2\sin 2\alpha.(1+\cos 2\alpha)} = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha\,.$$

**b)** $\tan\alpha\left(\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right) = \tan\alpha\left(\dfrac{1+\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha}\right)$

$$= \tan\alpha\left(\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$$= \tan\alpha.\frac{2\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha\,.$$

**c)** $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{4}.\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{4}.\sin\alpha + \cos\frac{\pi}{4}.\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}.\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{4}.\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{4}.\sin\alpha - \cos\frac{\pi}{4}.\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4}.\sin\alpha}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha + \cos\alpha + \sin\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha - \cos\alpha - \sin\alpha)} = -\frac{2\cos\alpha}{2\sin\alpha} = -\cot\alpha\,.$$

**d)** $\dfrac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha} = \dfrac{2\cos 4\alpha.\sin\alpha}{2\cos 4\alpha} = \sin\alpha\,.$

**Bài 5.** Tính:

**a)** $\cos\dfrac{22\pi}{3}$; **b)** $\sin\dfrac{23\pi}{4}$; **c)** $\sin\dfrac{25\pi}{3} - \tan\dfrac{10\pi}{3}$; **d)** $\cos^2\dfrac{\pi}{8} - \sin^2\dfrac{\pi}{8}$.

### *Giải*

**a)** $\cos\dfrac{22\pi}{3} = \cos\left(\dfrac{21\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$$= \cos\left(6\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\,.$$

**b)** $\sin\dfrac{23\pi}{4} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{24\pi}{4}\right)$

$$= \sin\left(-\frac{\pi}{4} + 6\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**c)** $\sin\frac{25\pi}{3} - \tan\frac{10\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{24\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{3} + 3\pi\right)$

$$= \sin\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \sqrt{3}.$$

**d)** $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right) - \left(1 - \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Bài 6.** Chứng minh rằng:

**a)** $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$; **b)** $\tan 267^\circ + \tan 93^\circ = 0$;

**c)** $\sin 65^\circ + \sin 55^\circ = \sqrt{3}\cos 5^\circ$; **d)** $\cos 12^\circ - \cos 48^\circ = \sin 18^\circ$.

### *Giải*

**a)** Ta có: $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) + \cos(45^\circ + 30^\circ)$

$= \sin 45^\circ\cos 30^\circ + \cos 45^\circ\sin 30^\circ + \cos 45^\circ\cos 30^\circ - \sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (đpcm)

**b)** $\tan 267^\circ + \tan 93^\circ = \left[\tan\left(267^\circ + 93^\circ\right)\right].\left[1 - \tan 267^\circ.\tan 93^\circ\right]$

$= \left(\tan 360^\circ\right).\left(1 - \tan 267^\circ.\tan 93^\circ\right) = 0.$

**c)** $\sin 65^\circ + \sin 55^\circ = 2\sin\left(\frac{65^\circ + 55^\circ}{2}\right).\cos\left(\frac{65^\circ - 55^\circ}{2}\right)$

$= 2\sin 65^\circ.\cos 5^\circ = \sqrt{3}\cos 5^\circ$ (đpcm)

**d)** $\cos 12^\circ - \cos 48^\circ = -2\sin\left(\frac{12^\circ + 48^\circ}{2}\right).\sin\left(\frac{12^\circ - 48^\circ}{2}\right)$

$= 2\sin 30^\circ.\sin(-18^\circ) = 2\sin 30^\circ.\sin 18^\circ = \sin 18^\circ$ (đpcm).

**Bài 7.** Chứng minh các đồng nhất thức sau đây:

**a)** $\frac{1 - \cos x + \cos 2x}{\sin 2x - \sin x} = \cot x$ **b)** $\frac{\sin x + \sin\frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$

**c)** $\frac{2\cos 2x - \sin 4x}{2\cos 2x + \sin 4x} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ **d)** $\tan x - \tan y = \frac{\sin(x - y)}{\cos x.\cos y}$

## *Giải*

**a)** Ta có VT $= \dfrac{1 - \cos x + \cos 2x}{\sin 2x - \sin x} = \dfrac{1 - \cos x + 2\cos^2 x - 1}{2\sin x.\cos x - \sin x}$

$= \dfrac{\cos x(2\cos x - 1)}{\sin x(2\cos x - 1)} = \text{cotx} = \text{VP}$ (đpcm)

**b)** Ta có VT $= \dfrac{\sin x + \sin\dfrac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos\dfrac{x}{2}} = \dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{x}{2}}{2\cos^2\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}}$

$= \dfrac{\sin\dfrac{x}{2}\left(2\cos\dfrac{x}{2} + 1\right)}{\cos\dfrac{x}{2}\left(2\cos\dfrac{x}{2} + 1\right)} = \dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\text{cox}\dfrac{x}{2}} = \tan\dfrac{x}{2} = \text{VP}$ (đpcm)

**c)** Ta có VT $= \dfrac{2\cos 2x - \sin 4x}{2\cos 2x + \sin 4x} = \dfrac{2\cos 2x - 2\sin 2x\cos 2x}{2\cos 2x + 2\sin 2x\cos 2x}$

$= \dfrac{2\cos 2x(1 - \sin 2x)}{2\cos 2x(1 + \sin 2x)} = \dfrac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x} = \dfrac{(\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2}$

$= \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)} = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \text{VP}$ (đpcm)

**d)** Ta có VT $= \text{tanx} - \text{tany} = \dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\sin y}{\cos y}$

$= \dfrac{\sin x\cos y - \cos x\sin y}{\cos x.\cos y} = \dfrac{\sin(x - y)}{\cos x.\cos y} = \text{VP}$ (đpcm)

**Bài 8.** Chứng minh các biểu thức sau đây không phụ thuộc x:

**a)** $A = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$;

**b)** $B = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$;

**c)** $C = \sin^2 x + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$;

**d)** $D = \dfrac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x}.\cot x$.

## *Giải*

**a)** Ta có: $A = \sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x - \cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = 0$ (không phụ thuộc x)

**b)** $B = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

$= \cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x - \sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0$ (không phụ thuộc vào x)

**c)** $c = \sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

$= \sin^2 x + \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - x - \frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x + \frac{\pi}{3} + x\right)\right]$

$= \sin^2 x + \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{4}$ (không phụ thuộc x).

**d)** $D = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x}.\cot x = \frac{2\sin^2 x + 2\sin x\cos x}{2\cos^2 x - 2\sin x\cos x}.\cot x$

$= \frac{2\sin x(\sin x + \cos x)}{2\cos x(\sin x + \cos x)}.\cot x = \tan x.\cot x = 1$ (không phụ thuộc x)

## III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

**Bài 9.** Tính giá trị các biểu thức sau:

**a)** $A = 16\sin 10^\circ.\sin 30^\circ.\sin 50^\circ.\sin 70^\circ.\sin 90^\circ$; **b)** $B = \cos 165^\circ$;

**c)** $C = \frac{\sin 110^\circ}{\cos 110^\circ} + \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$.

**Bài 10.** Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc x

**a)** $A = \sin^2 x + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$;

**b)** $B = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}$.

**Bài 11*.** Rút gọn biểu thức sau:

$P = \sin 3x.\sin x.\sin^2 x + \cos 3x.\cos x.\cos^2 x$.

**Bài 12*.** Chứng minh rằng: $8\sin^3\frac{\pi}{8} + 8\sin^2\frac{\pi}{8} - 1 = 0$.

## IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN

**Bài 9.**

**a)** $A = 1$ **b)** $B = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ **c)** $C = 0$.

**Bài 10.**

**a)** Đáp số: $A = \frac{3}{2}$ (không phụ thuộc x).

**b)** Đáp số: $B = \frac{2}{3}$ (không phụ thuộc x).

**Bài 11.** Đáp số: $P = \cos^3 2x$.

**Bài 12.** Từ đẳng thức: $\sin\frac{\pi}{10} = \cos 4.\frac{\pi}{10}$ và áp dụng công thức gốc nhân đôi với chú ý $0 < \sin\frac{\pi}{10} < 1$ ta suy ra (đpcm).

## V. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

***Chọn câu đúng trong các bài tập sau:***

**Bài 16.** Giá trị $\sin\frac{47\pi}{6}$ là: (A) : $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (B) : $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (C) : $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (D) : $-\frac{1}{2}$.

**Bài 17.** Cho $\cos a = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ với $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$. Giá trị tana là:

(A) : $\frac{3}{\sqrt{5}}$; (B) : $\frac{2}{\sqrt{5}}$; (C) : $-\frac{2}{\sqrt{5}}$; (D) : $-\frac{3}{\sqrt{5}}$.

**Bài 18.** Cho $a = \frac{5\pi}{36}$. Giá trị của biểu thức:

$\cos 3a + 2\cos(\pi - 3a)\,.\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 1{,}5a\right)$ là:

(A) : $\frac{1}{4}$; (B) : $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (C) : 0; (D) : $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

**Bài 19.** Giá trị của biểu thức $A = \dfrac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{8} - 1\right)}{1 + 8\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}}$ là:

(A) : $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (B) : $\frac{\sqrt{3}}{4}$; (C) : $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; (D) : $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

**Bài 20.** Cho $\cot a = \frac{1}{2}$. Giá trị biểu thức: $B = \dfrac{4\sin a + 5\cos a}{2\sin a - 3\cos a}$ là:

(A) : $\frac{1}{17}$;  (B) : $\frac{5}{9}$;  (C) : 13;  (D) : $\frac{2}{9}$.

**Bài 21.** Cho tana = 2.

Giá trị của biểu thức: $C = \frac{\sin a}{\sin^3 a + 3\cos^3 a}$ là:

(A) : $\frac{5}{12}$;  (B) : $\frac{7}{11}$;  (C) : $-\frac{8}{11}$;  (D) : $\frac{10}{11}$.

## VI. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

| ***Câu số*** | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Đáp án*** | (D) | (A) | (A) | (D) | (C) | (D) |

**Bài 16.**

Ta có: $\sin\frac{47\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{48\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

⇒ Đáp án đúng là (D) .

**Bài 17.** Ta có: $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} - 1 = \frac{9}{5} - 1$

$\Rightarrow \tan a = \frac{3}{\sqrt{5}}, \left(\pi < a < \frac{3\pi}{2}\right)$. Vậy đáp án đúng là (A) .

**Bài 18.** Ta có: $\cos 3a + 2\cos(\pi - 3a).\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 1,5a\right) =$

$$= \cos 3a - 2\cos 3a.\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3a\right)}{2}$$

$$= \cos 3a.\sin^2 3a = \cos\frac{15\pi}{36}.\sin^2\frac{15\pi}{36} = \cos\frac{5\pi}{12}\sin^2\frac{5\pi}{12} =$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

⇒ Đáp án đúng là (A) .

**Bài 19.** Ta tính được $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}}$, $\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Vậy đáp án đúng là (D) .

**Bài 20.** Ta có: $B = \dfrac{4 + 5\cot a}{2 - 3\cot a} = \dfrac{4 + \dfrac{5}{2}}{2 - \dfrac{3}{2}} = 13$ ⇒ Đáp án đúng là (C).

**Bài 21.** Ta có:

$$C = \frac{\tan a}{\tan a.\sin^2 a + 3\cos^2 a} = \frac{\tan a}{\tan a\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\tan^2 a}} + 3.\dfrac{1}{1 + \tan^2 a}}$$

$$= \frac{2}{\dfrac{2}{1 + \dfrac{1}{4}} + \dfrac{3}{1 + 4}} = \frac{2}{\dfrac{8}{5} + \dfrac{3}{5}} = \frac{2}{\dfrac{11}{5}} = \frac{10}{11}$$

⇒ (D) là đáp án đúng.

# ÔN TẬP CUỐI NĂM

## I. CÂU HỎI

**Câu 1:** Hãy phát biểu các khẳng định sau đây dưới dạng điều kiện cần và đủ.

Tam giác ABC vuông tại A thì $a^2 = b^2 + c^2$.

Tam giác ABC có các cạnh thoả mãn hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$ thì vuông tại A.

***Hướng dẫn:*** Điều kiện cần và đủ để ΔABC vuông tại A là nó có các cạnh thoả mãn: $a^2 = b^2 + c^2$.

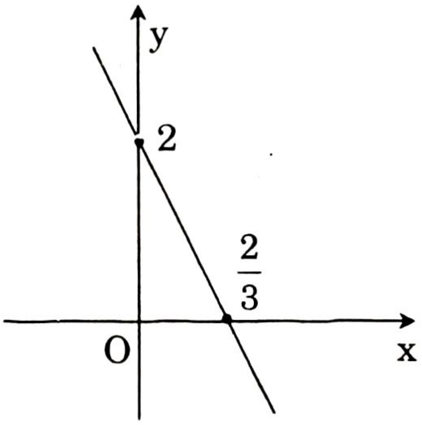
**Câu 2:** Viết bảng biến thiên và vẽ các đồ thị hàm số:

**a)** $y = -3x + 2$; **b)** $y = 2x^2$; **c)** $y = 2x^2 - 3x + 1$

***Hướng dẫn:***

**a)** Bảng biến thiên:

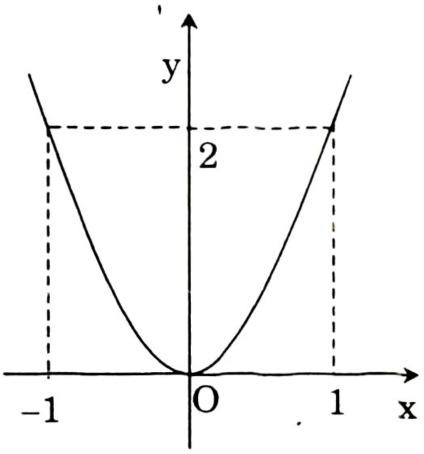
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| y | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |



- Đồ thị: Đồ thị cắt Ox tại $\left(\dfrac{2}{3}; 0\right)$, cắt Oy tại (0; 2).

**b)** Bảng biến thiên:

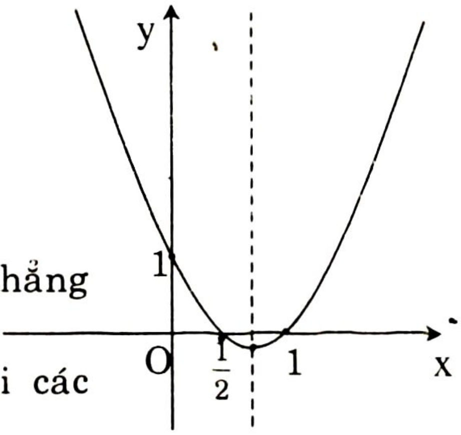
| x | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |



- Đồ thị qua các điểm (0; 0), (1; 2), (−1; 2), ...

**c)** Bảng biến thiên:

| x | $-\infty$ | | $\frac{3}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | $\frac{-1}{8}$ | ↗ | $+\infty$ |



- Đồ thị có đỉnh $I\left(\frac{3}{4}; \frac{-1}{8}\right)$ nhận đường thẳng $x = \frac{3}{4}$ làm trục đối xứng, cắt Ox tại các điểm (1; 0) và $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ cắt Oy tại (0; 1).

**Câu 3:** Phát biểu quy tắc xét dấu nhị thức bậc nhất. Áp dụng quy tắc đó để giải bất phương trình sau:

$$f(x) = \frac{(3x - 2)(5 - x)}{2 - 7x} \geq 0$$

***Hướng dẫn:***

* Dấu của nhị thức bậc nhất: $ax + b$ $(a \neq 0)$.

| | $-\infty$ | | $\frac{-b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ax + b | | (trái dấu với a) | 0 | (cùng dấu với a) | |

* Giải: $f(x) \geq 0$. Ta có bảng sau:

| x | $-\infty$ | | $\frac{2}{7}$ | | $\frac{2}{3}$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3x − 2 | | − | | − | 0 | + | | + | |
| 5 − x | | + | | + | | + | 0 | − | |
| 2 − 7x | | + | 0 | − | | − | | − | |
| f(x) | | − | ‖ | + | 0 | − | 0 | + | |

Từ bảng ta có tập nghiệm của bất phương trình: $f(x) \geq 0$ là:

$$T = \left(\frac{2}{7}; \frac{2}{3}\right] \cup [5; +\infty).$$

**Câu 4:** Phát biểu định lí về dấu của tam thức bậc 2: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Áp dụng quy tắc đó, hãy xác định giá trị của m để tam thức sau luôn luôn âm:

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 1 - m.$$

***Hướng dẫn:***

* Định lí về dấu tam thức bậc 2: cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ và $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu $\Delta < 0$ thì $a\,f(x) > 0$ $\forall x$.

Nếu $\Delta = 0$ thì $a\,f(x) \geq 0$ (dấu bằng xảy ra khi $x = -\frac{b}{2a}$).

Nếu $\Delta > 0$ thì f(x) có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ giả sử $x_1 < x_2$. Thế thì f(x) cùng dấu với a với mọi x ngoài đoạn $[x_1; x_2]$ (tức là $x < x_1$ hoặc $x > x_2$) và f(x) trái dấu với a khi x ở trong khoảng hai nghiệm (tức là $x_1 < x < x_2$).

* Áp dụng: Tam thức $f(x) < 0$ $\forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 9 + 8(1 - m) < 0 \Leftrightarrow 17 - 8m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{17}{8}.$$

**Câu 5:** Nêu các tính chất của bất đẳng thức. Áp dụng một trong các tính chất đó, hãy so sánh các số $2^{3000}$ và $3^{2000}$.

***Hướng dẫn:***

* Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức:

1) $a < b$ và $b > c \Rightarrow a < c$.

2) $a < b \Rightarrow a + \alpha < b + \alpha$.

3) $\alpha > 0$ thì $a < b \Rightarrow a\alpha < b\alpha$.

$\alpha > 0$ thì $a < b \Rightarrow a\alpha > b\alpha$.

4) $a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$.

5) $a > 0, c > 0, a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$.

6) $a > 0, a \in Z^+, a < b \Rightarrow a^u < b^u$.

7) $a > 0, a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

$a < b \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

* So sánh $2^{3000}$ và $3^{2000}$ ta có $2^{3000} = (2^3)^{1000} = 8^{1000}$,

$3^{2000} = (3^2)^{1000} = 9^{1000}$

Mà $8 < 9 \Rightarrow 2^{3000} = 8^{1000} < 9^{1000} = 3^{2000}$.

**Câu 6:**

**a)** Em hãy thu thập số liệu thống kê điểm trung bình học kỳ I của từng học sinh lớp mình.

**b)** Lập bảng phân bố thực nghiệm tần số và tần suất ghép lớp để trình bày các số liệu thống kê trên.

***Hướng dẫn:***

**a)** Giả sử ta có điểm trung bình học kỳ I của lớp 10A gồm 30 học sinh như sau:

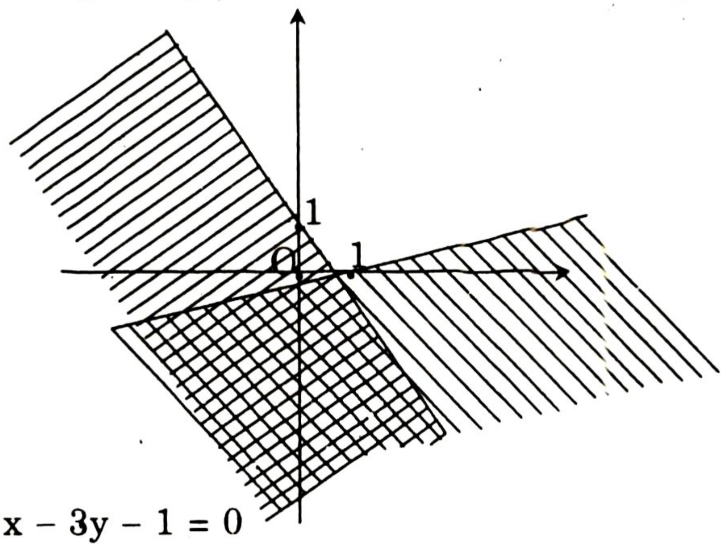
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7.0 | 5.0 | 5.5 | 6.0 | 6.3 | 8.0 |
| 7.4 | 5.6 | 5.0 | 8.0 | 7.4 | 6.7 |
| 7.1 | 8.5 | 7.0 | 8.1 | 6.1 | 6.2 |
| 6.5 | 9.0 | 7.0 | 6.5 | 7.2 | 7.0 |
| 8.4 | 7.0 | 7.5 | 6.5 | 7.5 | 7.5 |

**b)** Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp.

| Các lớp điểm trung bình X (điểm) | Giá trị trung tâm $C_i$ | Tần số $n_i$ | Tần suất $f_i$(%) |
|---|---|---|---|
| [5.0; 6.0) | 5.5 | 4 | 13.3 |
| [6.0; 7.0) | 6.5 | 7 | 23.3 |
| [7.0; 8.0) | 7.5 | 13 | 43.4 |
| [8.0; 9.0) | 8.5 | 6 | 20 |
| Cộng | | 30 | 100% |

**Câu 7:** Nêu các công thức lượng giác đã học. (SGK)

**Câu 8:** Nêu cách giải hệ hai bất phương trình bậc nhất hai ẩn và giải hệ: $\begin{cases} 2x + y \geq 1 \\ x - 3y \leq 1 \end{cases}$



***Hướng dẫn:***

* Cách giải (SGK).

* Giải hệ: $\begin{cases} 2x + y \geq 1 \\ x - 3y \leq 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 1 \geq 0 \\ x - 3y - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Xét $d_1$: $2x + y - 1 = 0$, $d_2$: $x - 3y - 1 = 0$

Trong mp với cùng một hệ toạ độ vẽ $d_1$, $d_2$. Nghiệm của hệ là tập hợp điểm thuộc phần mặt phẳng không bị gạch chéo.

## II. BÀI TẬP

**Bài 1.** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 4} - \sqrt{-x^2 + 8x - 15}$.

**a)** Tìm tập xác định của f(x).

**b)** Giả sử $B = \{x \in R / 4 < x \le 5\}$.

Hãy xác định các tập $A \setminus B$ và $R \setminus (A \setminus B)$.

### *Giải*

**a)** Hàm số có nghĩa khi:

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 4 \ge 0 \\ -x^2 + 8x + 15 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ 3 \le x \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \le x \le 5$$

Vậy tập xác định của f(x) là $A = [3; 5]$.

**b)** * $A \setminus B = [3; 5] \setminus (4; 5] = [3; 4]$.

* $R \setminus (A \setminus B) = (-\infty; +3) \cup (4; +\infty)$.

**Bài 2.** Cho phương trình: $mx^2 - 2x - 4m - 1 = 0$ (1)

**a)** Chứng minh rằng với mọi giá trị $m \ne 0$, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

**b)** Tìm m để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 1, nghiệm kia lớn hơn 1.

**c)** Tìm m để $-1$ là một nghiệm của phương trình. Sau đó tìm nghiệm còn lại.

### *Giải*

**a)** Xét phương trình (1) có:

$$\Delta' = (-1)^2 + m(4m + 1) = 4m^2 + m + 1$$

$$= (2m)^2 + 2 \cdot \frac{m}{2} + 1 = \left(2m + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0\ \forall m$$

Vậy (1) luôn luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m \ne 0$.

**b)** Giả sử (1) có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ (giả sử $x_1 < x_2$), khi đó yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow m.f(1) < 0$ (với $f(x) = mx^2 - 2x - 4m - 1$)

$$\Leftrightarrow m(m - 2 - 4m - 1) < 0 \Leftrightarrow m(-3m - 3) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -1 \end{array}\right.$$

**c)** Phương trình (1) có một nghiệm $x = -1 \Rightarrow m(-1)^2 + 2 - 4m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -3m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$ khi $m = \frac{1}{3}$ thì (1) trở thành:

$$\frac{1}{3}x^2 - 2x - \frac{7}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 7 \end{array}\right.$$ Vậy nghiệm còn lại là $x = 7$.

**Bài 3.** Cho phương trình: $x^2 - 4mx + 9(1 - m)^2 = 0$.

**a)** Xét xem với giá trị nào của m, phương trình trên có nghiệm.

**b)** Giả sử $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình đã cho, hãy tính tổng và tích của chúng. Tìm một hệ thức giữa $x_1$ và $x_2$ độc lập đối với m.

**c)** Xác định m để hiệu các nghiệm của phương trình bằng 4.

### *Giải*

**a)** Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 9(1 - m)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2m)^2 - [3(1 - m)]^2 \geq 0 \Leftrightarrow [2m + 3(1 - m)][2m - 3(1 - m)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (-m + 3)(5m - 3) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} \leq m \leq 3.$$

Vậy $m \in \left[\frac{3}{5}; 3\right]$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

**b)** Theo Viet ta có: $x_1 + x_2 = 4m$, $x_1.x_2 = 9(1 - m)^2$, hệ thức độc lập giữa $x_1$, $x_2$ với m là $x_1.x_2 = 9\left(1 - \frac{x_1 + x_2}{4}\right)^2$.

**c)** Theo bài ra ta có $|x_1 - x_2| = 4 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 16$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 16m^2 - 36(1 - m)^2 = 16$

$\Leftrightarrow 16m^2 - 36 + 72m - 36m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow -20m^2 + 72m - 52 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2{,}6 \end{array}\right.$ (thoả mãn). Vậy $m = 1$; $m = 2{,}6$ là hai giá trị cần tìm.

**Bài 4.** Chứng minh các bất đẳng thức.

**a)** $5(x - 1) < x^5 - 1 < 5x^4(x - 1)$, nếu $x - 1 > 0$.

**b)** $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 \geq 0$, biết rằng $x + y \geq 0$.

**c)** $\sqrt{4a + 1} + \sqrt{4b + 1} + \sqrt{4c + 1} < 5$,

biết rằng $a, b, c \geq -\frac{1}{4}$ và $a + b + c = 1$.

### *Giải*

**a)** Xét hiệu A $= x^5 - 1 - 5(x - 1) = x^5 - 5x + 4$

$= (x - 1)[x(x + 1)(x^2 + 1) - 4]$ do $x - 1 > 0$

$\Rightarrow x > 1 \Rightarrow x(x + 1)(x^2 + 1) > 4 \Rightarrow A > 0$.

Vậy ta có: $x^5 - 1 > 5(x - 1)$ (1)

tương tự ta chứng minh được:$5x^4(x - 1) > x^5 - 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra (đpcm).

**b)** Ta có $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 = x^4(x - y) + y^4(y - x) = (x^4 - y^4)(x - y)$

$= (x - y)^2.(x + y).(x^2 + y^2) \geq 0$ (do $x + y \geq 0$).

**c)** Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$$\sqrt{4a + 1} + \sqrt{4b + 1} + \sqrt{4c + 1} \leq \sqrt{21}.$$

Mặt khác $\sqrt{21} < 5$ từ đó $\Rightarrow$ (đpcm).

**Bài 5.** Giải hệ: $\begin{cases} 3x + 5y - z = 9 \\ x + 3y + 2z = 1 \\ 5x - 2y - 3z = -3 \end{cases}$

### *Giải*

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 10y - 2z = 18 \\ x + 3y + 2z = 1 \\ 5x - 2y - 3z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 13y = 19 \\ 3x + 9y + 6z = 3 \\ 10x - 4y - 6z = -6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 13y = 19 \\ 13x + 5y = -3 \\ z = \dfrac{1 - x - 3y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$

**Bài 6. a)** Xét dấu biểu thức: $f(x) = 2x(x + 2) - (x + 2)(x + 1)$.

**b)** Xét sự biến thiên và vẽ trong cùng một hệ toạ độ vuông góc các đồ thị của các hàm số sau: $y = 2x(x + 2)$ $(C_1)$

$y = (x + 2)(x + 1)$$(C_2)$

Tìm toạ độ giao điểm A, B của $(C_1)$ và $(C_2)$.

**c)** Tính các hệ số a, b, c để hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có giá trị lớn nhất bằng 8 và đồ thị của nó đi qua A và B.

### *Giải*

**a)** Ta có: $f(x) = 2x^2 + 4x - x^2 - 3x - 2 = x^2 + x - 2$.

Dấu f(x):

| x | $-\infty$ |  | $-2$ |  | $1$ |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) |  | + | 0 | − | 0 | + |  |

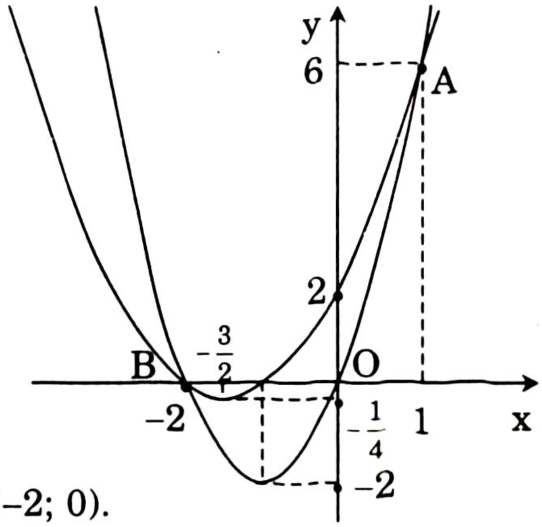
Vậy $f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

$f(x) < 0$ khi $x \in (-2; 1)$.

**b)** Ta có $(C_1) : y = 2x^2 + 4x$, $(C_2) : y = x^2 + 3x + 2$.

(Học sinh tự lập bảng biến thiên.)

Đồ thị $(C_1)$ và $(C_2)$ trên cùng một hệ toạ độ.



* Toạ độ giao điểm của $(C_1)$ và $(C_2)$ là nghiệm hệ sau:

$$\begin{cases} y = 2x(x+2) \\ y = (x+2)(x+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $(C_1)$ cắt $(C_2)$ tại A(1; 6) và B(−2; 0).

**c)** Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} 6 = a + b + c \\ 0 = 4a - 2b + c \\ -\dfrac{4}{4a} = 8 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad (\mathrm{I}) : \begin{cases} a + b + c = 6 \\ 4a - 2b + c = 6 \\ b^2 - 4ac + 3 = 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

Giải (I) ta được hoặc $\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = 8 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = -\dfrac{2}{9} \\ b = \dfrac{16}{9} \\ c = \dfrac{40}{9} \end{cases}$

Vậy hai parabol cần tìm là:

$$y = -2x^2 + 8,\ y = -\frac{2x^2}{9} + \frac{16x}{9} + \frac{40}{9}.$$

**Bài 7.** Chứng minh các hệ thức sau:

**a)** $\dfrac{1 - 2\sin^2 a}{1 + \sin 2a} = \dfrac{1 - \tan a}{1 + \tan a}$;  **b)** $\dfrac{\sin a - \sin 3a + \sin 5a}{\cos a - \cos 3a + \cos 5a} = \tan 3a$;

**c)** $\dfrac{\sin^4 a - \cos^4 a + \cos^2 a}{2(1 - \cos a)} = \cos^2\dfrac{a}{2}$; **d)** $\dfrac{\tan 2x.\tan x}{\tan 2x - \tan x} = \sin 2x$.

## *Giải*

**a)** $VT = \dfrac{1 - 2\sin^2 a}{1 + \sin 2a} = \dfrac{\sin^2 a + \cos^2 a - 2\sin^2 a}{(\sin a + \cos a)^2} = \dfrac{\cos^2 a - \sin^2 a}{(\sin a + \cos a)^2}$

$= \dfrac{\cos a - \sin a}{\cos a + \sin a} = \dfrac{1 - \tan a}{1 + \tan a} = VP$ (đpcm).

**b)** $VT = \dfrac{\sin a - \sin 3a + \sin 5a}{\cos a - \cos 3a + \cos 5a} = \dfrac{(\sin a + \sin 5a) - \sin 3a}{(\cos a + \cos 5a) - \cos 3a}$

$= \dfrac{2\sin 3a\cos 2a - \sin 3a}{2\cos 3a\cos 2a - \cos 3a} = \dfrac{\sin 3a(2\cos 2a - 1)}{\cos 3a(2\cos 2a - 1)} = \dfrac{\sin 3a}{\cos 3a}$

$= \tan 3a = VP$ (đpcm).

**c)** Ta có: $VT = \dfrac{\sin^4 a - \cos^4 a + \cos^2 a}{2(1 - \cos a)} = \dfrac{\sin^2 a - \cos^2 a + \cos^2 a}{2(1 - \cos a)}$

$= \dfrac{\sin^2 a}{2(1 - \cos a)} = \dfrac{4\sin^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{a}{2}}{2.2\sin^2\frac{a}{2}} = \cos^2\dfrac{a}{2} = VP.$

**d)** Ta có: $VT = \dfrac{\tan 2x\tan x}{\tan 2x - \tan x} = \dfrac{\sin 2x.\sin x}{\sin 2x.\cos x - \sin x.\cos 2x}$

$= \dfrac{\sin 2x.\sin x}{\sin(2x - x)} = \sin 2x = VP$ (đpcm).

**Bài 8.** Rút gọn biểu thức sau:

**a)** $\dfrac{1 + \sin 4a - \cos 4a}{1 + \cos 4a + \sin 4a}$; **b)** $\dfrac{1 + \cos a}{1 - \cos a}\tan^2\dfrac{a}{2} - \cos^2 a$;

**c)** $\dfrac{\cos 2x - \sin 4x - \cos 6x}{\cos 2x + \sin 4x - \cos 6x}$.

## *Giải*

**a)** Ta có $\dfrac{1 + \sin 4a - \cos 4a}{1 + \cos 4a + \sin 4a} = \dfrac{(1 - \cos 4a) + \sin 4a}{(1 + \cos 4a) + \sin 4a} = \dfrac{2\sin^2 2a + \sin 4a}{2\cos^2 2a + \sin 4a}$

$= \dfrac{2\sin 2a(\sin 2a + \cos 2a)}{2\cos 2a(\cos 2a + \sin 2a)} = \tan 2a$.

**b)** $\dfrac{1 + \cos a}{1 - \cos a}\tan^2\dfrac{a}{2} - \cos^2 a = \dfrac{2\cos^2\frac{a}{2}}{2\sin^2\frac{a}{2}}.\dfrac{\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}} - \cos^2 a = 1 - \cos^2 a = \sin^2 a.$

**c)** Ta có $$\frac{\cos 2x - \sin 4x - \cos 6x}{\cos 2x + \sin 4x - \cos 6x} = \frac{(\cos 2x - \cos 6x) - \sin 4x}{(\cos 2x - \cos 6x) + \sin 4x}$$
$$= \frac{-2\sin 4x\sin(-2x) - \sin 4x}{-2\sin 4x\sin(-2x) + \sin 4x}$$
$$= \frac{\sin 4x(2\sin 2x - 1)}{\sin 4x(2\sin 2x + 1)} = \frac{2\sin 2x - 1}{2\sin 2x + 1}.$$

**Bài 9.** Tính:

**a)** $4(\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ)$;

**b)** $96\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{6}$;

**c)** $\tan 9^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ - \tan 27^\circ$.

### *Giải*

**a)** Ta có:

$$4(\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ)$$
$$= 4[(\cos 24^\circ - \cos 84^\circ) + (\cos 48^\circ - \cos 12^\circ)]$$
$$= 4(2\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ) = 4\left[2.\frac{\sqrt{5}-1}{4} - 4.\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^3\right] = 2.$$

(Theo bài 13 của §3)

**b)** Ta có:

$$96\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{6}$$
$$= 48\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{6}$$
$$= 24\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{6}$$
$$= 12\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}.\cos\frac{\pi}{6} = 6\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} = 6\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 9.$$

**c)** Ta có: $\tan 9^\circ + \tan 81^\circ = \tan(9^\circ + 81^\circ).(1 - \tan 9^\circ\tan 81^\circ) = 0$

Tương tự: $\tan 63^\circ + \tan 27^\circ = 0$

Vậy: $\tan 9^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ - \tan 27^\circ = 0$.

# MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU 3

### CHƯƠNG I: MỆNH ĐỀ TẬP HỢP

§1. Mệnh đề 5
§2. Tập hợp 11
§3. Các phép toán tập hợp 14
§4. Các tập số 17
§5. Số gần đúng. sai số 19
Ôn tập chương I 21

### CHƯƠNG II: HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1. Hàm số 27
§2. Hàm số y = ax + b 30
§3. Hàm bậc hai 36
Ôn tập chương II 43

### CHƯƠNG III: PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. Đại cương về phương trình 57
§2. Phương trình quy về phương trình bậc nhất. bậc hai 61
§3. Phương trình và hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn 69
Ôn tập chương III 75

### CHƯƠNG IV: BẤT ĐẲNG THỨC – BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. Bất đẳng thức 89
§2. Bất phương trình và hệ bất phương trình một ẩn 92
§3. Dấu của nhị thức bậc nhất 98
§4. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn 105
§5. Dấu của tam thức bậc hai 110
Ôn tập chương IV 116

### CHƯƠNG V: THỐNG KÊ

§1. Bảng phân bố tần số và tần suất 126
§2. Biểu đồ tần suất 132
§3. Số trung bình cộng mốt. số trung vị 138
§4. Phương sai và độ lệch chuẩn 142
Ôn tập chương V 147

### CHƯƠNG VI: GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. Góc và cung lượng giác 159
§2. Các giá trị lượng giác của một cung 165
§3. Công thức lượng giác 170
Ôn tập chương VI 178
Ôn tập cuối năm 187

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
**Điện thoại: (04) 39714896; (04) 39724770; Fax: (04) 39714899**

---

***Chịu trách nhiệm xuất bản:***

Giám đốc : PHÙNG QUỐC BẢO
*Tổng biên tập* : PHẠM THỊ TRÂM
*Biên tập* : LAN HƯƠNG
*Trình bày bìa* : QUỐC VIỆT

*Đối tác liên kết xuất bản:*
**CÔNG TY SÁCH - TBGD ĐỨC TRÍ**

**SÁCH LIÊN KẾT**

# HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10

Mã số: 1L-117 ĐH2009
In 3.000 cuốn, khổ 16 x 24cm. Tại Công ty TNHH In Bao bì Hưng Phú
Số xuất bản: 245-2009/CXB/41-54/ĐHQGHN, ngày 24/04/2009.
Quyết định xuất bản số: 117 LK–TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2009.